2017학년도 9월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

1	③	2	①	3	④	4	⑤	5	④
6	②	7	③	8	⑤	9	③	10	⑤
11	①	12	②	13	②	14	④	15	①
16	②	17	④	18	②	19	③	20	⑤
21	①	22	53	23	40	24	32	25	2
26	6	27	240	28	27	29	33	30	25

수학 영역

해 설

1. [출제의도] 교집합 원소의 개수 구하기
$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$ 이므로 원소의 개수는 3

2. [출제의도] 다항식의 연산 계산하기
$A+2B=5x^2-9x+1+4x^2+6x-8$
$=9x^2-3x-7$

3. [출제의도] 다항식의 인수분해 계산하기
$x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$ 이므로
$a=2$, $b=2$
따라서 $a+b=4$

4. [출제의도] 연립방정식 계산하기
$$\begin{cases} y=2x+3 & \cdots ㉠ \\ x^2+y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면
$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$
따라서 $x=-1$, $y=1$ 이므로 $a+3b=2$

5. [출제의도] 절댓값이 있는 부등식 이해하기
$|x+a|\le 8$ 을 풀면
$-8-a\le x\le 8-a$
이때 주어진 부등식의 해가 $b\le x\le 2$ 이므로
$a=6$, $b=-14$
따라서 $a-b=20$

6. [출제의도] 조건과 진리집합 이해하기
조건 p 의 진리집합 $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$
조건 $\sim p$ 의 진리집합 $P^C=\{5,\ 7\}$
따라서 모든 원소의 합은 12

7. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기
a^2 이 최솟값이고 bc 가 최댓값일 때
a^2-bc 는 최솟값을 갖는다.
a^2 의 최솟값은 $a=5i$ 일 때 -25,
bc 의 최댓값은 $b=-4i,\ c=5i$ 또는
$b=5i$, $c=-4i$ 일 때 20
따라서 a^2-bc 의 최솟값은 -45

8. [출제의도] 곱셈공식 이해하기
$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=3^2-7$ 이므로 $ab=1$
$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=7^2-2\times 1^2$
따라서 $a^4+b^4=47$

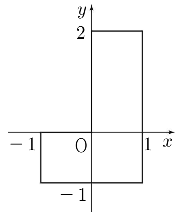
9. [출제의도] 허근의 성질 이해하기
$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)=0$ 이므로
z_1, z_2 는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 허근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $z_1z_2=3$
이고 $z_1=\overline{z_2}$, $z_2=\overline{z_1}$
따라서 $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2z_1z_2=6$

10. [출제의도] 세 점을 지나는 원의 방정식 이해하기
원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 에 주어진 세 점의 좌표를 대입하면
$$\begin{cases} 4-2a+c=0 \\ 16+4a+c=0 \\ 5+a+2b+c=0 \end{cases}$$
위 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=\dfrac{5}{2}$, $c=-8$
$x^2+y^2-2x+\dfrac{5}{2}y-8=0$
$(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2=\left(\dfrac{13}{4}\right)^2$
따라서 $p=1$, $q=-\dfrac{5}{4}$ 이므로 $p+q=-\dfrac{1}{4}$

11. [출제의도] 원의 성질 이해하기
선분 AB 의 수직이등분선을 l 이라 하면 직선 l 은 선분 AB 의 중점 $\mathrm{M}\left(2,\ \dfrac{a+1}{2}\right)$ 을 지나고, 주어진 원의 넓이를 이등분하므로 원의 중심$(-2,\ 5)$ 를 지난다.
직선 l 의 기울기는 $\dfrac{a-9}{8}$
직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{a-1}{2}$
두 직선이 서로 수직이므로 $\dfrac{a-9}{8}\times\dfrac{a-1}{2}=-1$
따라서 $a=5$

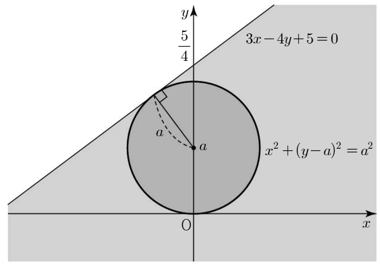
12. [출제의도] 미지수가 3개인 방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
포도 1송이의 가격을 x 원, 사과 1개의 가격을 y 원, 바나나 1송이의 가격을 z 원이라 하면
$$\begin{cases} 2x+y=5500 \\ 2y+z=6000 \\ 2z+x=8000 \end{cases}$$
위 식을 연립하여 풀면
$x=2000$, $y=1500$, $z=3000$
따라서 D세트의 가격은 11,000 원

13. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 추론하기
방정식 $f(x+1,\ -(y-2))=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -1, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이므로 그림과 같다.



(별해) 방정식 $f(x+1,\ -y+2)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 도형이다.

14. [출제의도] 필요조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$



원의 중심 $(0,\ a)$ 와 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 a 이상이 되어야 하므로
$\dfrac{|-4a+5|}{\sqrt{9+16}}\ge a$
$-4a+5>0$ 이므로 식을 정리하면 $-4a+5\ge 5a$
따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값은 $\dfrac{5}{9}$

15. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선은 $y=-\dfrac{1}{2}(x-a)-3$ 이고 이를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l 은
$x=-\dfrac{1}{2}(y-a)-3$, 즉 $2x+y-a+6=0$
직선 l 이 원에 접하므로 원의 중심 $(-1,\ 3)$ 에서 직선 l 까지의 거리 $d=\dfrac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
따라서 $a=2,\ 12$ 이므로 모든 a 값의 합은 14

16. [출제의도] 점과 직선사이의 거리를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x 축, 남북을 y 축으로 하면 본부는 $(-30,\ 20)$,
A 지점은 $(-30,\ -40)$, B 지점은 $(50,\ 0)$
물체가 지나간 경로의 직선의 방정식은
$x-2y-50=0$ 이므로
이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는
$\dfrac{|-30-40-50|}{\sqrt{5}}=24\sqrt{5}$

17. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 수학

내적 문제 해결하기

$\{f(x+1)\}^2=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$에서

$$\{f(x)\}^2=x(x-2)(x^2-2x+6)+9$$
$$=(x^2-2x)(x^2-2x+6)+9$$
$$=(x^2-2x+3)^2$$

$f(x)<0$이므로 $f(x)=-x^2+2x-3$

$f(x+a)=-(x+a)^2+2(x+a)-3$에 대하여

$f(x+a)=g(x)$라 하면 $g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -6이 되기 위해서는

$g(2)=-(2+a)^2+2(2+a)-3=-6$

따라서 $a^2+2a-3=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 모든 상수 a의 값의 곱은 -3

18. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면

α, β는 이차방정식 $-\dfrac{x^2}{2}+k=mx$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2m$, $\alpha\beta=-2k$

두 점 A, B는 직선 $y=mx$위의 점이므로

$\mathrm{A}(\alpha,\ m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ m\beta)$

$\overline{\mathrm{OA}}=-\alpha\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}$

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{OB}}}$$
$$=\frac{1}{-\alpha\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}+\frac{1}{\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$
$$=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$
$$=\frac{-\sqrt{4m^2+\boxed{8k}}}{-2k\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}}$$

실수 m의 값에 관계없이 $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OB}}}$이 갖는 일정한 값을 t라 하자.

$t^2=\dfrac{4m^2+\boxed{8k}}{\left(2k\times\boxed{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}$이므로

이를 정리하면

$4(1-k^2t^2)m^2+4(2k-k^2t^2)=0\cdots\cdots$ ㉠

따라서 ㉠이 m에 대한 항등식이므로 $k=\boxed{\dfrac{1}{2}}$이다.

이때 $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OB}}}=\dfrac{1}{k}$이다.

$f(m)=\sqrt{1+m^2}$, $g(k)=8k$, $p=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$f(p)\times g(p)=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times4=2\sqrt{5}$

19. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 추론하기

ㄱ. $\{f(0)\}^3=1$이므로 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $n=1$

$f(x)=ax+b$라 하면 좌변의 최고차항의 계수는 a^3, 우변의 최고차항의 계수는 $4a$이므로 $a^3=4a$

$a>0$이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2 (거짓)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해 $f(x)=2x+1$이므로 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$라 하면

$\{f(x)\}^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$이므로

$\{f(1)\}^3=c+d=27$

$\{f(-1)\}^3=-c+d=-1$

이를 연립하여 풀면 $c=14$, $d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x+13$ (참)

20. [출제의도] 원의 방정식과 삼각형 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a+4+1}{3}$, $y=\dfrac{b+3+7}{3}$

$a=3x-5$, $b=3y-10$ $\cdots$ ㉠

점 P는 원 C 위의 점이므로

$(a-1)^2+(b-2)^2=4$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

직선 AB의 방정식은 $4x+3y-25=0$이므로 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원의 중심 $(2,\ 4)$와 직선 AB사이의 거리는 1

구하고자 하는 거리의 최솟값은 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원과 직선 AB사이의 최단거리이므로 $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

21. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 $\mathrm{D}(0,\ 0)$, 점 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$,

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$이므로

$(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$, $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$을 연립하여 풀면 점 A의 좌표는 $(2,\ \sqrt{3})$

$\overline{\mathrm{AC}}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의해 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CE}}=1$이고 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PD}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{\mathrm{PD}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{PE}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{PE}}=\dfrac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR이 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{ER}}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로

$S_1=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로 $S_2=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$

$\dfrac{S_2}{S_1}=8-2\sqrt{7}$이므로 $a=8$, $b=-2$

따라서 $ab=-16$

(별해) 점 D가 선분 BC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2\right)$이 성립한다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

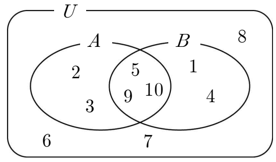
22. [출제의도] 복소수 계산하기

$(7+2i)(7-2i)=49+4=53$

23. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$2^3+5\times2^2+4\times2+4=40$

24. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기



따라서 $n(A)=5$이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$

25. [출제의도] 이차함수의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2+2(a-4)x+a^2+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

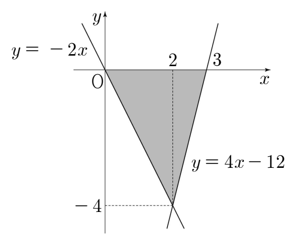
$D/4=(a-4)^2-(a^2+a-1)<0$

$-9a+17<0$, $a>\dfrac{17}{9}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2

26. [출제의도] 부등식의 영역 이해하기

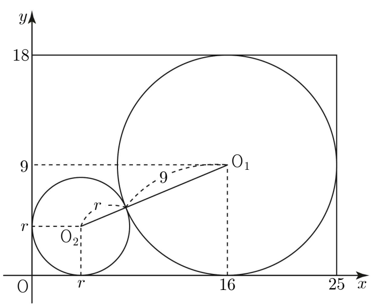
연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

27. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

처음 상자에 담은 통조림통의 밑면의 중심을 O_1이라 하고 상자의 남은 공간에 담을 수 있는 원기둥 모양 통조림통 밑면의 중심을 O_2라 하자. 상자의 밑면의 한 꼭짓점이 원점에 오도록 좌표평면에 두면, 그림과 같이 두 원의 중심은 각각 $\mathrm{O}_1(16,\ 9)$, $\mathrm{O}_2(r,\ r)$



$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}^2=(16-r)^2+(9-r)^2=(9+r)^2$

$r^2-68r+256=0$, $r=4$ 또는 $r=64$

$r\le9$이므로 $r=4$

따라서 부피의 최댓값은 $\pi\times16\times15=240\pi$

28. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$y=2x(x-a)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$ 이므로

점 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{2}\right)$, 점 $\mathrm{B}(a,\ 0)$

함수 $f(x)=-(x-a)(x-a-3)$ 이고

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 A 를 지나므로

$-\frac{a^2}{2}=-\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)$

$a^2-6a=0$, a는 양수이므로 $a=6$

따라서 삼각형 ACB 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times18=27$

29. [출제의도] 이차함수와 직선을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$2\le x\le4$에서 이차함수 $y=(x-2a)^2+b$는 그래프의 축 $x=2a$의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x의 좌표가 달라진다.

(ⅰ) $a<1$인 경우, 함수의 최솟값은 $x=2$일 때 $(2-2a)^2+b=4$ 이므로 $b=-4(a-1)^2+4$

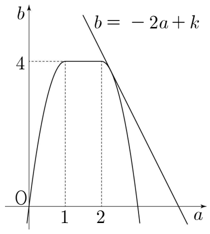
(ⅱ) $1\le a<2$인 경우, 함수의 최솟값은 꼭짓점의 y좌표이므로 $b=4$

(ⅲ) $a\ge2$인 경우, 함수의 최솟값은 $x=4$일 때 $(4-2a)^2+b=4$ 이므로 $b=-4(a-2)^2+4$

그러므로

$$b=\begin{cases}-4(a-1)^2+4 & (a<1)\\ 4 & (1\le a<2)\\ -4(a-2)^2+4 & (a\ge2)\end{cases}$$

$2a+b=k$라 두면



$b=-4(a-2)^2+4$와 $b=-2a+k$가 접할 때 k는 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=\frac{33}{4}$ 이고 $4M=33$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

주어진 조건 (가)에 의해 $x_2=-2x_1+6$ 이므로 점 $\mathrm{Q}(-2x_1+6,\ y_2)$라 하고 이를 원 C_2에 대입하면 $(-2x_1)^2+\left(y_2-4+6\sqrt{3}\right)^2=16$ ⋯ ㉠

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$가 원 C_1 위의 점이므로 대입하면

${x_1}^2+(y_1-4)^2=4$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 정리하면

$(y_1-4)^2=\left(\frac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}\right)^2$

조건 (나)에 의해

$y_1-4\le0$, $\frac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}\ge0$ 이므로

$-y_1+4=\frac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}$

이를 정리하면 $2y_1+y_2=12-6\sqrt{3}$

양변을 3 으로 나누면 $\frac{2y_1+y_2}{3}=4-2\sqrt{3}$

그러므로 점$\left(2,\ 4-2\sqrt{3}\right)$은 선분 PQ 를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$x_1=0$일 때,

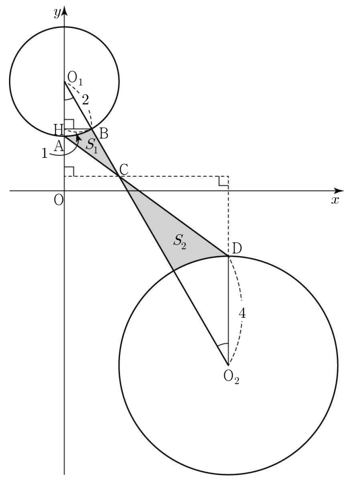
$\mathrm{P}(0,\ 2)$, $\mathrm{Q}\left(6,\ 8-6\sqrt{3}\right)$

$x_1=1$일 때,

$\mathrm{P}\left(1,\ 4-\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(4,\ 4-4\sqrt{3}\right)$ 이고

이때 직선 PQ 의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x+4$ 이므로 두 원 C_1, C_2의 중심을 지난다.

$0\le x_1\le1$ 이므로 선분 PQ 가 지나간 부분은 그림의 어두운 부분과 같다.



원 C_1의 중심을 $\mathrm{O}_1(0,\ 4)$, 원 C_2의 중심을 $\mathrm{O}_2\left(6,\ 4-6\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(1,\ 4-\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{C}\left(2,\ 4-2\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{D}\left(6,\ 8-6\sqrt{3}\right)$이라 하자. 점 B 에서 y축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 $\mathrm{O_1HB}$ 는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{BH}}=1$, $\overline{\mathrm{O_1H}}=\sqrt{3}$

그러므로 $\angle\mathrm{HO_1B}=30^\circ$

S_1의 넓이는 삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{O_1AB}$ 의 넓이를 뺀 값과 같다. 삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$ 이고 부채꼴 $\mathrm{O_1AB}$ 의 넓이는

$\pi\times2^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{3}$

즉, S_1의 넓이는 $2-\frac{\pi}{3}$

삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 와 삼각형 $\mathrm{O_2DC}$ 는 닮음이다.

닮음비가 $1:2$ 이므로 S_1과 S_2의 넓이의 비는 $1:4$

그러므로 S_2의 넓이는 $8-\frac{4}{3}\pi$

선분 PQ 가 그리는 도형의 넓이는 $10-\frac{5}{3}\pi$

따라서 $a=10$, $b=\frac{5}{3}$ 이므로 $a+9b=25$