EBS 수능특강 수학영역

01 지수와 로그

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

를 만족시키는 근 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$을 통틀어

a의 거듭제곱근

이라고 한다.

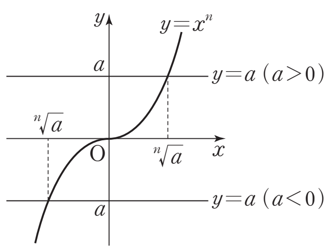
참고 0이 아닌 실수 a의 n제곱근은 복소수 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

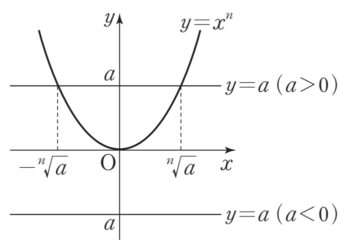
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

설명 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것과 같으므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이때 이 실수를 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

① n이 홀수일 때



② n이 짝수일 때



예 ① 8의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중 실수인 것으로 2이다.
그러므로 $\sqrt[3]{8}=2$이다.
② 16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중 실수인 것으로 -2 또는 2이다.
그러므로 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

예 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=2$
② $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

예제 1 거듭제곱근

27의 세제곱근 중 실수인 것을 α, 허수인 것을 각각 β, γ라 할 때, $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

풀이 전략 실수 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근임을 이용한다.

풀이 27의 세제곱근은 방정식 $x^3=27$의 근이다.

이 방정식을 풀면

$$x^3-3^3=0,\ (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

이때 방정식 $x^2+3x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\times9<0$$

이므로 이 이차방정식은 허근을 갖는다.

그러므로 $\alpha=3$이고 β, γ는 이차방정식 $x^2+3x+9=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta+\gamma=-3,\ \beta\gamma=9$$

이므로

$$\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=(-3)^2-2\times9=-9$$

따라서 $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}=\dfrac{-9}{3}=-3$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[20007-0001]

유제 1 $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{(-4)^2}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0002]

유제 2 $\sqrt[6]{6}\div\sqrt{\sqrt[3]{3}}\times(\sqrt[6]{2})^5$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2. 정수인 지수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수의 정의

$a \neq 0$이고 n이 자연수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

설명 $a\neq 0$이고 m, n이 자연수일 때, 지수법칙

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ …… ㉠

이 성립한다.

㉠이 $m=0$인 경우에도 성립한다고 하면

$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$

이어야 한다. 이때 $a^n \neq 0$이므로 다음과 같이 정의한다.

$a^0=1$

또 ㉠이 $m=-n$ (n은 자연수)인 경우에도 성립한다고 하면

$a^{-n}\times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

이어야 한다. 그러므로 다음과 같이 정의한다.

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

예 ① $2^0=1$, $(-3)^0=1$

② $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$, $(-3)^{-2}=\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{9}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq 0$, $b\neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

설명 ① m, n이 음의 정수인 경우

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 자연수)로 놓으면 음의 정수인 지수의 정의와 중학교에서 배운 지수가 자연수일 때의 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$a^m a^n = a^{-p}\times a^{-q} = \frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

같은 방법으로 두 정수 m, n 중 하나만 음의 정수인 경우에도 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립함을 보일 수 있다.

예 ① $2^3\times 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1 = 2$

② $2^2 \div 2^{-3} = 2^{2-(-3)} = 2^5 = 32$

③ $(2^3)^{-2} = 2^{3\times(-2)} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

④ $(2\times 3)^{-2} = 2^{-2}\times 3^{-2} = \dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{36}$

예제 2 지수가 정수일 때의 지수법칙

두 양의 실수 a, b가

$$\begin{cases} a^{-2}(a^2+ab)^2=9 \\ (a^2-b^2)(a+b)^{-1}=1 \end{cases}$$

을 만족시킬 때, ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 지수가 정수일 때의 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $a^{-2}(a^2+ab)^2=9$에서

$a^{-2}\times a^2\times(a+b)^2=9$

$a^{-2+2}\times(a+b)^2=9$

$(a+b)^2=9$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$a+b=3$ …… ㉠

또 $(a^2-b^2)(a+b)^{-1}=1$에서

$(a-b)(a+b)\times(a+b)^{-1}=1$

$(a-b)(a+b)^{1+(-1)}=1$

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=1$이므로

$ab=2$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[20007-0003]

유제 3 $5^{-4}\times\left(\frac{1}{25}\right)^{-5}\div\frac{1}{125^{-2}}$의 값은?

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

[20007-0004]

유제 4 자연수 n에 대하여 $(24\times n^{-3})^{-1}$이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

3. 유리수인 지수

(1) 유리수인 지수의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다. 특히 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$이다.

설명 $a>0$이고 m, n이 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

$(a^m)^n=a^{mn}$ ⋯⋯ ㉠

이때 지수가 유리수일 때도 ㉠이 성립한다고 하면 유리수 $\frac{m}{n}$ (m은 정수, n은 2 이상의 정수)에 대하여

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$이다. 이때 $a^{\frac{m}{n}}>0$이라 하면 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 그러므로 다음과 같이 정의한다.

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

참고 지수가 유리수일 때는 밑 a가 양수, 즉 $a>0$에 유의해야 한다.

예를 들어 $\sqrt[3]{-8}=-2$이지만, $(-8)^{\frac{1}{3}}$과 같은 수는 정의하지 않는다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^ra^s=a^{r+s}$ ② $a^r\div a^s=a^{r-s}$

③ $(a^r)^s=a^{rs}$ ④ $(ab)^r=a^rb^r$

설명 ① $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)라 하면 유리수인 지수의 정의와 거듭제곱근의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$a^r\times a^s=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}\times a^{\frac{np}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\times a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$$

예 ① $2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$ ② $2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=2^1=2$

③ $(2^{\frac{1}{3}})^3=2^{\frac{1}{3}\times 3}=2^1=2$ ④ $(2\times 3^{\frac{1}{2}})^2=2^2\times(3^{\frac{1}{2}})^2=2^2\times 3^{\frac{1}{2}\times 2}=2^2\times 3^1=12$

4. 실수인 지수

(1) 실수인 지수의 정의

지수가 무리수인 수, 예를 들어 $2^{\sqrt{2}}$을 살펴보자.

무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$이고, 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ⋯를 지수로 갖는 수

2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, ⋯

은 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있는데 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 지수가 무리수인 수를 정의한다. 따라서 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

예제 3 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$2\sqrt{2}$의 6제곱근 중 양의 실수인 것을 a라 할 때, $a\times2^{-\frac{5}{4}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

풀이 전략 $a>0$이고 n이 짝수일 때, a의 n제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$인 것을 이용하여 나타낸다.

풀이 $2\sqrt{2}$의 6제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt[6]{2\sqrt{2}}$이므로

$$\begin{aligned}a&=\sqrt[6]{2\sqrt{2}}\\&=(2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}\\&=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}}\\&=2^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}a\times2^{-\frac{5}{4}}&=2^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{5}{4}}\\&=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\\&=2^{-1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[20007-0005]

유제 5 $\sqrt[4]{8}\div\left\{\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

[20007-0006]

유제 6 $(3^{\sqrt{3}}\div3)^{\sqrt{3}+1}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

5. 로그

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 기호로

$\log_a N$

으로 나타낸다. 즉,

$a^x=N \iff x=\log_a N$

이때 $\log_a N$에서 a를 밑, N을 진수라 하고, $\log_a N$을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

참고 ① $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

② $\log_a N$으로 쓸 때, 특별한 언급이 없으면 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$임을 의미한다.

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로

$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

예 ① $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

② $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \iff \frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$

(2) 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^r=r\log_a M$ (단, r는 실수)

설명 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라 하면

$a^m=M$, $a^n=N$

① $MN=a^m\times a^n=a^{m+n}$이므로

$$\begin{aligned}\log_a MN&=m+n\\&=\log_a M+\log_a N\end{aligned}$$

② $\frac{M}{N}=a^m\div a^n=a^{m-n}$이므로

$$\begin{aligned}\log_a \frac{M}{N}&=m-n\\&=\log_a M-\log_a N\end{aligned}$$

③ $M^r=(a^m)^r=a^{mr}$이므로

$$\begin{aligned}\log_a M^r&=mr\\&=r\log_a M\end{aligned}$$

예 ① $\log_2 6=\log_2(2\times3)=\log_2 2+\log_2 3$

$=1+\log_2 3$

② $\log_2\frac{3}{2}=\log_2 3-\log_2 2=\log_2 3-1$

③ $\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

예제 4 로그의 정의와 성질

두 실수 x, y가 $x=\log_2 3$, $2^y=24$를 만족시킬 때, $y-x$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 로그의 정의를 이용하여 y를 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $2^y=24$에서

$$y=\log_2 24$$

이때

$$\begin{aligned} y-x &= \log_2 24-\log_2 3 \\ &= \log_2 \frac{24}{3} \\ &= \log_2 2^3 \\ &= 3\log_2 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $2^x=3$, $2^y=24$이므로

$$2^{y-x}=\frac{2^y}{2^x}=\frac{24}{3}=8=2^3$$

따라서 $y-x=3$

정답과 풀이 4쪽

[20007-0007]

유제 7 1이 아닌 두 양의 실수 x, y가 $\log_2 x=\frac{1}{3}$, $\log_x y=2$를 만족시킬 때, xy의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0008]

유제 8 $\log_2(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4})+\log_2\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

(3) 로그의 밑의 변환

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

설명 $\log_a b=x,\ \log_c a=y$로 놓으면

$$a^x=b,\ c^y=a$$

이므로 지수법칙에 의하여

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이다. 그러므로

$$xy=\log_c b$$

$$\log_a b\times\log_c a=\log_c b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a\neq1$에서 $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$

② $\log_8 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 8}=\dfrac{1}{\log_2 2^3}=\dfrac{1}{3\log_2 2}=\dfrac{1}{3}$

(4) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0,\ a\neq1,\ b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m,\ n$은 실수이고 $m\neq0$)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1,\ c>0$)

설명 ① $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\dfrac{n\log_a b}{m\log_a a}=\dfrac{n}{m}\log_a b$

④ $c\neq1$일 때, $a=c^x$이라 하면 $x=\log_c a$이므로

$$a^{\log_b c}=(c^{\log_c a})^{\log_b c}=c^{\log_c a\times\log_b c}=c^{\log_c a\times\frac{\log_c c}{\log_c b}}=c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}=c^{\log_b a}$$

$c=1$일 때, 위의 식은 성립한다.

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_8 16=\log_{2^3}2^4=\dfrac{4}{3}\log_2 2=\dfrac{4}{3}$

예제 5 로그의 밑의 변환

1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

$$\log_a b : \log_{bc} ac = 2\log_a bc : 5$$

일 때, $\frac{5}{2}\log_a b - \log_a c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

풀이 전략 로그의 밑을 모두 a로 나타내어 식을 정리한다.

풀이 $\log_a b : \log_{bc} ac = 2\log_a bc : 5$에서

$$\log_a b : \frac{\log_a ac}{\log_a bc} = 2\log_a bc : 5$$

$$5\log_a b = 2\frac{\log_a ac}{\log_a bc} \times \log_a bc$$

$$\frac{5}{2}\log_a b = \log_a ac$$

따라서

$$\frac{5}{2}\log_a b - \log_a c = \log_a ac - \log_a c$$

$$= \log_a \frac{ac}{c}$$

$$= \log_a a = 1$$

답 ④

정답과 풀이 5쪽

[20007-0009]

유제 9 $\log_2 \sqrt{3} \times \log_9 16$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

[20007-0010]

유제 10 $2^{\log_4 3} = 9^a$일 때, 실수 a의 값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ 1　④ 4　⑤ 8

6. 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

밑을 10으로 하는 로그를 상용로그라고 한다. 이때 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예 ① $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

② $\log \dfrac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$

③ $\log \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(2) 상용로그의 활용

① 상용로그의 값 구하기

(i) 상용로그표를 이용한 상용로그의 값 구하기

상용로그표에는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 진수에 대한 상용로그의 값이 주어져 있으므로 주어진 진수의 값에 대한 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다.

(ii) 일반적인 양수의 상용로그의 값 구하기

양수 N은

$$N = a \times 10^n \ (1 \le a < 10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

그러므로 N의 상용로그의 값은 (i)을 이용하여

$$\log N = \log (a \times 10^n) = n + \log a$$

로 구한다.

② 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{30}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

예 2^{30}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 상용로그 $\log 2^{30}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2 = 0.3010$이므로

$$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03 = 9 + 0.03$$

(ii) 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 1.07 = 0.03$으로 계산하면

$$\begin{aligned} 9 + 0.03 &= \log 10^9 + \log 1.07 \\ &= \log (1.07 \times 10^9) \end{aligned}$$

(iii) 어림한 값 구하기

(i), (ii)에서 $\log 2^{30} = \log (1.07 \times 10^9)$이므로

$$\log 2^{30} - \log (1.07 \times 10^9) = 0,\ \log \frac{2^{30}}{1.07 \times 10^9} = 0,\ \frac{2^{30}}{1.07 \times 10^9} = 1$$

따라서 $2^{30} = 1.07 \times 10^9$

예제 6 상용로그

$\log \sqrt[5]{500}$의 값은? (단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

① 0.5248 ② 0.5298 ③ 0.5348 ④ 0.5398 ⑤ 0.5448

풀이 전략 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 $\log \sqrt[5]{500}$

$=\log 500^{\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{5}\log 500$

$=\frac{1}{5}\log \frac{1000}{2}$

$=\frac{1}{5}(\log 10^3-\log 2)$

$=\frac{1}{5}(3-0.3010)$

$=\frac{1}{5}\times 2.6990$

$=0.5398$

답 ④

정답과 풀이 5쪽

[20007-0011]

유제 11 양수 $N=a\times 10^n$ (a는 10보다 작은 자연수, n은 정수)에 대하여 $\log N=-2.5229$일 때, $a+n$의 값은? (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[20007-0012]

유제 12 두 자연수 a, b에 대하여 $\log a+\log b=3+\log 2$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

02 지수함수와 로그함수

1. 지수함수의 뜻

$a>0$, $a\neq1$일 때, 실수 x에 a^x을 대응시키는 함수

$$y=a^x \ (a>0,\ a\neq1)$$

을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

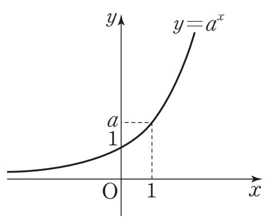
예 함수 $y=2^x$은 2를 밑으로 하는 지수함수이고, 함수 $y=x^2$은 지수함수가 아니다.

참고 모든 실수 x에 대하여 $1^x=1$이므로 함수 $y=1^x$은 상수함수가 된다.
따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

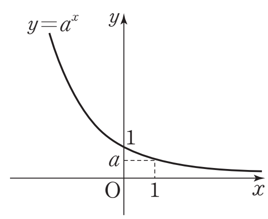
2. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 밑 a의 값의 범위에 따라 그림과 같다.

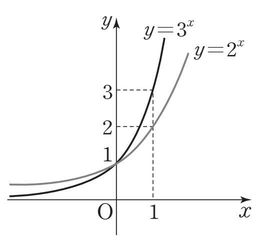
(1) $a>1$일 때

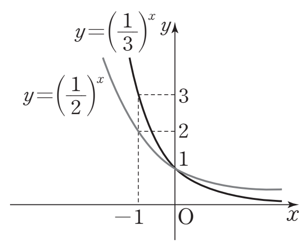


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.





3. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$를 지나고, x축(직선 $y=0$)을 점근선으로 한다.

예제 1 지수함수의 성질

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=a^{-x}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 1이 아닌 양수이다.)

보기

ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 점근선은 서로 같다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<g(x+1)$이면 $a>1$이다.
ㄷ. $g(-2)<3f(2)$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 두 점 $(0, 1)$, $(1, a)$를 지나고, x축(직선 $y=0$)을 점근선으로 한다.

풀이 ㄱ. 두 곡선 $y=2^x$, $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 점근선은 모두 직선 $y=0$으로 서로 같다. (참)
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<g(x+1)$이면 함수 $y=g(x)$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 $\frac{1}{a}>1$, 즉 $0<a<1$ (거짓)
ㄷ. $g(-2)=a^{-(-2)}=a^2$, $f(2)=2^2=4$
$g(-2)<3f(2)$에서 $a^2<3\times4=12$, 즉 $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$
이때 $a>0$, $a\neq1$이고, $3<2\sqrt{3}<4$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a는 2, 3으로 그 개수는 2이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

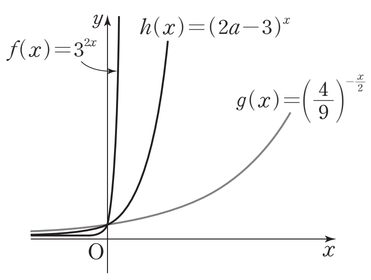
정답과 풀이 11쪽

[20007-0035]

유제 1 3 이상의 자연수 a에 대하여 세 함수

$$f(x)=3^{2x},\ g(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{x}{2}},\ h(x)=(2a-3)^x$$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같도록 하는 모든 자연수 a의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[20007-0036]

유제 2 곡선 $y=a^{2x-1}$과 y축이 만나는 점을 A라 하고, 곡선 $y=a^{2x-1}$과 x축이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 사각형 AOCB의 넓이가 3일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오.

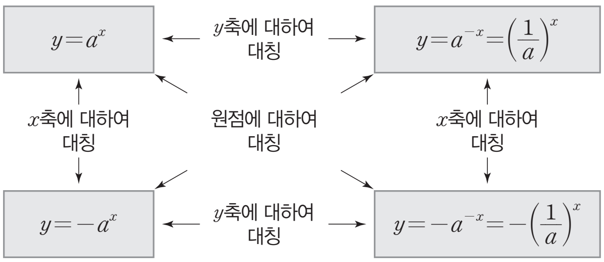
(단, O는 원점이고, a는 1이 아닌 양수이다.)

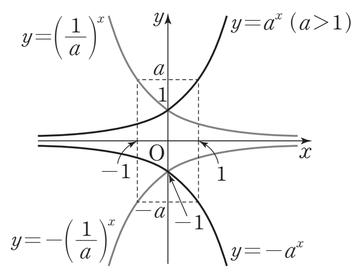
4. 지수함수의 그래프의 평행이동 및 대칭이동

(1) 평행이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=a^{x-m}+n$이다. 이때 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 점 $(m,\ 1+n)$을 지나고, 점근선은 직선 $y=n$이다.

(2) 대칭이동





5. 지수함수의 최댓값과 최솟값

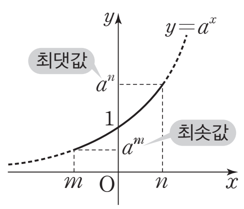
정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(m\leq n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.

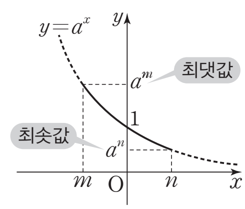
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(m\leq n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



(2) $0<a<1$일 때

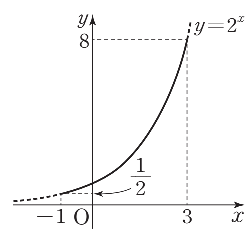


예 (1) 정의역이 $\{x\,|\,-1\leq x\leq3\}$일 때, 함수 $y=2^x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=2^x$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=2^x$은

$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}=\frac{1}{2}$을 갖고,

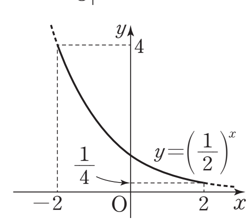
$x=3$에서 최댓값 $2^3=8$을 갖는다.



(2) 정의역이 $\{x\,|\,-2\leq x\leq2\}$일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$을 갖는다.



예제 2 지수함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 1\}$인 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$의 최댓값이 3이고 최솟값이 1일 때, $f(0)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{12}{7}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ 2 ④ $\frac{15}{7}$ ⑤ $\frac{16}{7}$

풀이 전략 정의역이 $\{x \mid m \le x \le n\}$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0, a\ne1)$의 최댓값과 최솟값
① $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.
② $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

풀이 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $f(x)=2^{x+a}+b$는 $x=1$에서 최댓값을 갖고, $x=-2$에서 최솟값을 갖는다.

$f(1)=3$에서 $2^{1+a}+b=2\times2^a+b=3$, 즉 $2^a=\frac{3-b}{2}$ …… ㉠

$f(-2)=1$에서 $2^{-2+a}+b=\frac{2^a}{4}+b=1$, 즉 $2^a=4(1-b)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3-b}{2}=4(1-b)$, $b=\frac{5}{7}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $2^a=4\left(1-\frac{5}{7}\right)=\frac{8}{7}$

따라서 $f(0)=2^a+b=\frac{8}{7}+\frac{5}{7}=\frac{13}{7}$

답 ②

정답과 풀이 11쪽

[20007-0037]

유제 3 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=a\times3^{2-x}+b$의 최댓값이 4이고 최솟값이 0일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a>0$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[20007-0038]

유제 4 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=2^x+1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자.
정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$인 함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 최댓값과 최솟값이 각각 $-m$, $-M$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $b>0$, $b\ne1$)

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

6. 로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의로부터

$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$$

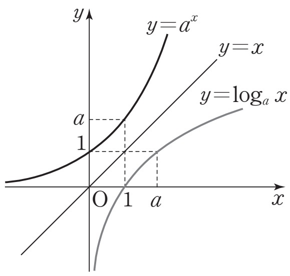
을 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

참고 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

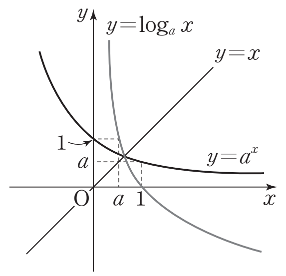
7. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수 $y=\log_a x$, $y=a^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

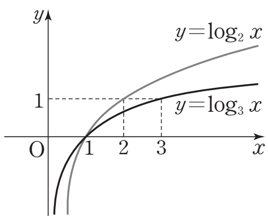
(1) $a>1$일 때

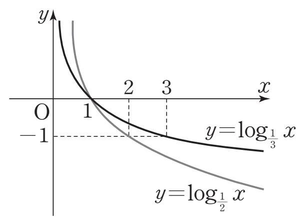


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그림과 같다.





8. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고, y축(직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

예제 3 로그함수의 성질

함수 $f(x)=3^{x+a}+b$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(b+1,\ 1)$을 지나고, 점근선이 직선 $x=-2$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

풀이 전략 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고, y축(직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

풀이 $y=3^{x+a}+b$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=3^{y+a}+b$, $3^{y+a}=x-b$

$y+a=\log_3(x-b)$, $y=\log_3(x-b)-a$

따라서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(x)=\log_3(x-b)-a$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(b+1,\ 1)$을 지나므로 $g(b+1)=1$에서

$\log_3 1-a=1$, $a=-1$

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 직선 $x=b$이므로 $b=-2$

따라서 $a+b=-1+(-2)=-3$

답 ①

다른 풀이 함수 $g(x)$의 역함수가 $f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(b+1,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(1,\ b+1)$을 지난다. 따라서 $f(1)=3^{1+a}+b=b+1$, $3^{1+a}=1$

$1+a=\log_3 1=0$에서 $a=-1$

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선인 직선 $x=-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-2$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다. 이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=b$이므로 $b=-2$

따라서 $a+b=-1+(-2)=-3$

정답과 풀이 12쪽

[20007-0039]

유제 5 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}+b\ (a>0,\ a\neq 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,\ 0)$을 지나고 점근선이 직선 $x=-2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[20007-0040]

유제 6 곡선 $y=\log_a x\ (a>1)$이 x축, 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACBD의 넓이가 7일 때, 상수 a의 값은?

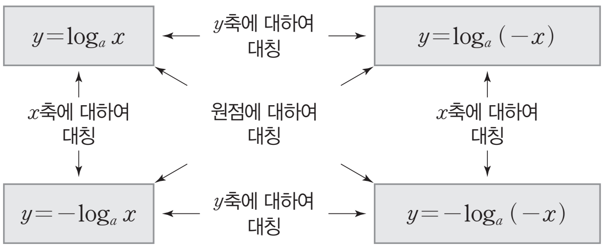
① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

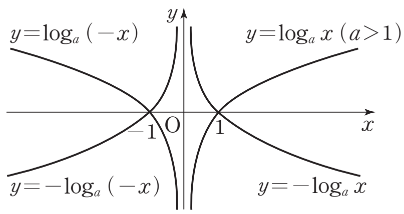
9. 로그함수의 그래프의 평행이동 및 대칭이동

(1) 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이다. 이때 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 점 $(1+m,\ n)$을 지나고, 점근선은 직선 $x=m$이다.

(2) 대칭이동





참고 $\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

10. 로그함수의 최댓값과 최솟값

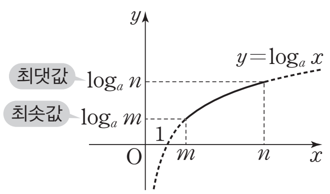
정의역이 $\{x\mid m\leq x\leq n\}$ $(0<m\leq n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

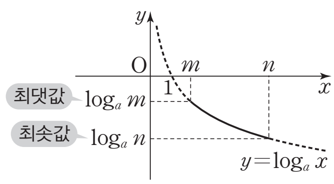
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\mid m\leq x\leq n\}$ $(0<m\leq n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



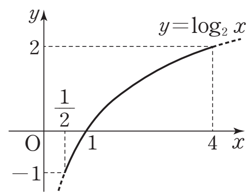
(2) $0<a<1$일 때



예 (1) 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq4\right\}$일 때, 함수 $y=\log_2 x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\log_2 x$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=\log_2 x$는

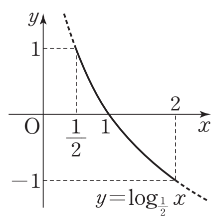
$x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\log_2\frac{1}{2}=-1$을 갖고, $x=4$에서 최댓값 $\log_2 4=2$를 갖는다.



(2) 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq2\right\}$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 최댓값과 최솟값

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는

$x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$을 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$을 갖는다.



예제 4 로그함수의 최댓값과 최솟값

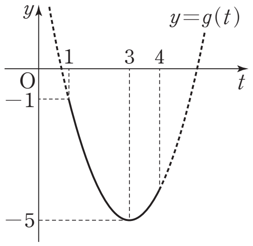
두 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=x^2-6x+4$에 대하여 정의역이 $\{x \mid 2\le x\le 16\}$인 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

풀이 전략 정의역이 $\{x \mid m\le x\le n,\ m>0\}$일 때, 함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\ne 1)$의 최댓값과 최솟값
① $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.
② $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

풀이 함수 $f(x)=\log_2 x$에서 밑이 2이고 $2>1$이므로
x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하고, x의 값이 감소하면 $f(x)$의 값도 감소한다.
이때 $f(x)=t$로 놓으면
$2\le x\le 16$일 때 $\log_2 2\le t\le \log_2 16$, 즉 $1\le t\le 4$이고

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(t)\\&=t^2-6t+4\\&=(t-3)^2-5\end{aligned}$$



이므로 $1\le t\le 4$일 때 $g(3)\le g(t)\le g(1)$
즉, $-5\le g(t)\le -1$
따라서 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$-1+(-5)=-6$$

답 ④

정답과 풀이 13쪽

[20007-0041]

유제 7 두 함수 $f(x)=6-x^2$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에 대하여 정의역이 $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}\le x\le 4\right\}$인 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

[20007-0042]

유제 8 정의역이 $\{x \mid 0\le x\le 3\}$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-4x+6)$의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

11. 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음이 성립한다.

$$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$$

이 성질을 이용하여 지수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $a^{f(x)}=b \iff f(x)=\log_a b$ (단, $b>0$)

② $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$

참고 부등식 $a^{f(x)}<a^{g(x)}$의 해는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 구한다.

(ⅰ) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$ (부등호의 방향이 일치)

(ⅱ) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$ (부등호의 방향이 반대)

12. 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음이 성립한다.

$$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$$

이 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $\log_a f(x)=b \iff f(x)=a^b,\ f(x)>0$

② $\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff 0<x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2>0$

참고 부등식 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$의 해는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 구한다.

(ⅰ) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$ (부등호의 방향이 일치)

(ⅱ) $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$ (부등호의 방향이 반대)

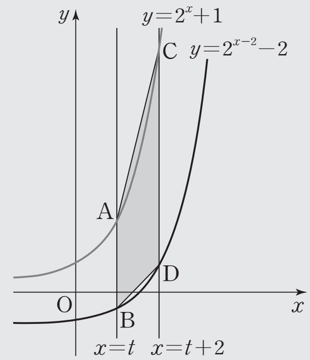
주의 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 해를 구할 때에는 로그의 정의에 의하여

(로그의 진수)>0

을 만족시켜야 함에 유의한다.

예제 5 지수에 미지수를 포함한 방정식

그림과 같이 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^{x-2}-2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또 직선 $x=t+2$가 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^{x-2}-2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이가 21일 때, 실수 t의 값은?



① $\log_2 3$　② 2　③ $\log_2 5$
④ $\log_2 6$　⑤ $\log_2 7$

풀이 전략 지수에 미지수를 포함한 방정식의 해는 다음을 이용하여 구한다. (단, $a>0$, $a\neq1$)
① $a^{f(x)}=b \iff f(x)=\log_a b$ (단, $b>0$)
② $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

풀이 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 사각형 ABDC는 사다리꼴이고, 네 점 A, B, C, D의 좌표는 차례로

$(t,\ 2^t+1)$, $(t,\ 2^{t-2}-2)$, $(t+2,\ 2^{t+2}+1)$, $(t+2,\ 2^t-2)$

이다. 따라서

$$\overline{AB}=(2^t+1)-(2^{t-2}-2)=2^t-\frac{2^t}{4}+3=\frac{3}{4}\times2^t+3,$$
$$\overline{CD}=(2^{t+2}+1)-(2^t-2)=4\times2^t-2^t+3=3\times2^t+3$$

이므로 사다리꼴 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{3}{4}\times2^t+3\right)+(3\times2^t+3)\right\}\times2=\frac{15}{4}\times2^t+6$$

$\frac{15}{4}\times2^t+6=21$에서 $\frac{15}{4}\times2^t=15$, $2^t=4$

따라서 $2^t=2^2$이므로 $t=2$

답 ②

정답과 풀이 13쪽

[20007-0043]

유제 9 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}>3^{20-19x}$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

[20007-0044]

유제 10 방정식 $\log_2(2x+1)+\log_2(x-4)=\log_2 11$의 실근을 구하시오.