수학공식(수1)

【다항식】

1. 곱셈공식

(1) $m(a+b)=ma+mb$, $m(a-b)=ma-mb$ (2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, (7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(9) $(x+a)(x+b)(x+c) \quad =x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(10) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \; =a^3+b^3+c^3-3abc$

(11) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

식의 계산	1) 곱셈공식 - 전개
	$(a-b)(a+b)=a^2\square b^2$
	$(a+b)^3=a^3+\square a^2b+\square ab^2+b^3$
	$(a-b)^3=a^3+\square a^2b+\square ab^2+b^3$

2. 곱셈공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(4) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

식의 계산	2) 곱셈공식 변형 $(a+b,\ ab)$
	다음 식을 $a+b$, ab로 나타내면
	$a^2+b^2=(a+b)^2-\square$
	$a^3+b^3=(a+b)^3-\square(a+b)$
	$=(\square)(a^2\square ab+b^2)$
	$(a-b)^2=(a+b)^2-\square$

3. 인수분해 공식

(1) $ma+mb=m(a+b)$, $ma-mb=m(a-b)$ (☜ m:공통인수)

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ (5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(9) $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc \; =(x+a)(x+b)(x+c)$

(10) $a^3+b^3+c^3-3abc \; =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ☞ $a+b+c=0 \implies a^3+b^3+c^3=3abc$

$a^3+b^3+c^3=3abc \implies a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

(11) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

식의 계산	4) 인수분해
	(1) $x^2-y^2=(x-y)\square$
	(2) $x^3+y^3=\square(x^2+\square+y^2)$
	(3) $x^3-y^3=\square(x^2+\square+y^2)$

식의 계산	3) 인수분해
	$x^3+y^3+z^3-3xyz$
	$=\square(x^2+y^2+z^2-\square-\square-\square)$

	(4) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ $= \boxed{}$ (5) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ $= \frac{1}{\boxed{}}\{(a-b)^2+(\boxed{})^2+(c-a)^2\}$

4.항등식

1) 항등식의 동의어

임의의 실수~에 대하여 = 모든 실수 ~에 대하여 = ~ 에 관계없이 = 항상 성립한다= ~이 존재한다 =나눗셈

2) 항등식이 되기 위한 조건(성질)

[1] $ax+b=0$ 이 x에 대한 항등식 $\Leftrightarrow$ $a=b=0$

[2] $ax^2+bx+c=0$ 이 x에 대한 항등식 $\Leftrightarrow$ $a=b=c=0$

[3] $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식 $\Leftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$

[4] $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식 $\Leftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

☞ **항등식의 성질을 이용한 계수의 총합 구하기**

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$일 때 우변의 계수들의 총합 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$의 값은 양변에 $x=1$을 대입한 $f(1)$의 값과 같다.

5. 다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 $B(\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $A=B\cdot Q+R$ 가 성립한다. 이 때, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

☞정수의 나눗셈 : 정수를 자연수 n으로 나눈 나머지 : 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$

6. 나머지정리와 인수정리

(1) 나머지 정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 x에 대한 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-\frac{b}{a})$와 같다.

(2) 인수 정리

x에 대한 다항식 $f(x)$가 $ax+b$로 나누어 떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(-\frac{b}{a})=0$이다.

식의 계산	6) 나머지 정리 - 일차식
	$f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $\boxed{}$가 된다.

식의 계산	5) 조립제법 - 일반
	$(x^3+5x^2-2)\div(x+1)$을 다음과 같이 나눈다.

$\boxed{}$	1	5	$\boxed{}$	-2
		$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
	1	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

몫: $x^2+\boxed{}x+\boxed{}$, 나머지: $\boxed{}$

7. 최대공약수 ·최소공배수

두 다항식 A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하면 (a, b는 서로소)

$A=aG$, $B=bG$, $L=abG$, $AB=LG$

8.약수와 배수

(1) 자연수 N을 소인수분해하였을 때 $N=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}$이면

약수의 개수 : $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

약수의 총합 : $(1+a+a^2+\cdots+a^{\alpha})\times(1+b+b^2+\cdots+b^{\beta})(1+c+c^2+\cdots+c^{\gamma})$

(2) 배수판정법

① 2의 배수 => 끝 수가 짝수인 수

② 3의 배수 => 각 자리수의 합이 3의 배수인 수

9의 배수 => 각 자리수의 합이 9의 배수인 수

③ 4의 배수 => 끝의 두 자리 수가 4의 배수인 수

25의 배수 => 끝의 두 자리 수가 25의 배수인 수

④ 5의 배수 => 끝 수가 0 또는 5인 수

⑤ 6의 배수 => 2의 배수이고 동시에 3의 배수인 수

⑥ 8의 배수 => 끝의 세 자리 수가 8의 배수인 수

125의 배수 => 끝의 세 자리 수가 125의 배수인 수

⑦ 11의 배수 => 주어진 수의 각 자리수를 따로 따로 생각할 때 홀수번 째의 각 자리 수의 합에서 짝수번째의 각 자리수의 합을 뺀 것이 11의 배수인 수

【방정식과 부등식】

9. 실수의 성질

(1) 실수 a, b에 대하여 $a^2\geq 0$, $|a|\geq 0$, $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=b=0$

(2) a, b가 양수이면 $a+b$, ab가 양수이지만 그 역은 성립하지 않는다.

10. 무리수의 성질

(1) **유리수** : 기약분수 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 정수, $m\neq 0$)의 꼴로 나타내어지는 수

무리수 : 기약분수로 나타낼 수 없는 수, 순환하지 않는 무한 소수

(2) **무리수가 서로 같을 조건**

a, b, c, d는 유리수이고 $\sqrt{m}$은 무리수일 때

$a+b\sqrt{m}=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m} \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

실수계산	절대값 계산
	식에 절대값이 있을 경우, 조건에 따라서 나누어 계산한다. $\lvert a\rvert=\begin{cases}(\qquad\qquad) & (a\ \square\ 0)\\(\qquad\qquad) & (a\ \square\ 0)\end{cases}$

11. 절대값의 성질

(1) $|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\-a & (a<0)\end{cases}$

(2) $|a|\geq 0$, $|a|^2=a^2$

$|a||b|=|ab|$, $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$ (단, $b\neq 0$)

$|a+b|\leq|a|+|b|$

(3) $a>0$일 때

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 또는 $x>a$

수학공식(수1)

12. 복소수의 정의

(1) 허수단위 i : 제곱하여 -1이 되는 수 $i^2=-1(i=\sqrt{-1})$, $a>0$일 때 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

(2) a, b가 실수일 때 복소수 $a+bi$에 대하여

허수 : $a+bi$ $(b\neq 0)$, **실수** : a $(b=0)$, **순허수** : $bi(a=0,\ b\neq 0)$

주의☞ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (단, $a\leq 0$, $b\leq 0$ <=> $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$)

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $a\geq 0$, $b<0$ <=> $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$)

13. 켤레복소수 $\overline{z}$의 성질

복소수 $z=a+bi(a,\ b$는 실수)에 대하여

(1) $\overline{z}=a-bi$, $\overline{\overline{z}}=z$, $z+\overline{z}=2a$(실수) $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$(실수)

(2) z가 실수 <=> $z=\overline{z}$ <=> $z^2\geq 0$ $(\because b=0)$ z가 순허수 <=> $z+\overline{z}=0$, $z\neq 0$ <=> $z^2<0$

(3) 두 복소수 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

예) $z+\overline{z}=4$이면 $z=2+bi(b$는 실수)의 꼴로 놓을 수 있다.

복소수	복소수의 분류
	(1) $a+bi$가 실수일 때 a, b의 조건 ⇒ ( ) (2) $a+bi$가 순허수일 때 a, b의 조건 ⇒ ( )

복소수	켤레복소수
	복소수 $z=a+bi(a,\ b$는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $\overline{z}=\overline{a+bi}=$ ( )

복소수	7) 복소수의 거듭제곱
	$i^{4k+1}=$ ( ) $i^{4k+2}=$ ( ) $i^{4k+3}=$ ( ) $i^{4k}=$ ( ) ( )의 배수 제곱근 단위로 반복된다.

복소수	8) 음수의 제곱근
	$a\boxed{\ }0$, $b\boxed{\ }0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ $a\boxed{\ }0$, $b\boxed{\ }0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

14. 일차방정식 $ax=b$ 의 해법

(ⅰ) $a\neq 0$일 때 $x=\dfrac{b}{a}$

(ⅱ) $a=0$일 때, ① $b\neq 0$이면 불능 ② $b=0$이면 부정

15. 이차방정식의 근

(1) 해법

① 인수분해에 의한 풀이 ; 이차식이 쉽게 인수분해 되는 경우에는 실수의 성질 $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$을 이용하여 이차방정식을 푼다.

② 근의 공식에 의한 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$의 근은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이고 위의 공식에서 b가 짝수 b에 $2b'$를 대입하면 $x=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$이다.

(2) 근을 알 때 방정식의 작성

두 근이 α, β인 이차방정식 : $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

세 근이 α, β, γ인 삼차방정식 : $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)=0$

(3) 근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양 <=> $D\geqq0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 <=> $D\geqq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 한 근은 양, 한 근은 음 <=> $\alpha\beta<0$

☞**참고: 위의 내용은 이차함수의 응용에서 근의 분리문제로 해결 할 수 있다.**

16. 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

(ⅰ) $D=b^2-4ac>0$ <=> 서로 다른 두 실근

(ⅱ) $D=b^2-4ac=0$ <=> 중근(실근)

(ⅲ) $D=b^2-4ac<0$ <=> 서로 다른 두 허근

☞ **주의 :계수가 실수일 때 한해서 판별식은 의미가 있는것이지만 특히 $D=0$일 때에는 계수가 복소수라 하여도 같은 두 근을 갖게 된다는 것에 주의합시다.(이 때 같은 두 근은 허수일 수도 있다.)**

17. 근과 계수의 관계

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$, $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

② 3차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

18. 방정식의 근의 성질

1. 유리계수 실계수 방정식의 근의 성질

(1) 이차 이상의 방정식의 계수가 모두 유리수일 때 $a+b\sqrt{m}$이 한 근이면 $a-b\sqrt{m}$도 근이다.

(단, a, b는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) 이차 이상의 방정식의 계수가 모두 실수일 때 $a+bi$가 한 근이면 $a-bi$도 근이다.

(단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

2. 허근의 성질

(1) $x^3=1$의 한 허근을 w라 하면 $w^3=1$, $w^2+w+1=0$이고 또한 다른 한 허근은 $\overline{w}$ 이므로 $w+\overline{w}=-1$, $w\overline{w}=1$, $\overline{w}=w^2$

(2) $x^3=-1$의 한 허근을 w라 하면 $w^3=-1$, $w^2-w+1=0$, $w+\overline{w}=1$, $w\overline{w}=1$

19. 연립방정식의 해법

(1) 연립일차방정식의 해법

1) 미지수가 2개인 연립일차방정식(2원 일차연립방정식) 가감법, 등치법, 대입법에 의해 푼다.

※ 참고 : 3원 일차연립방정식

① 미지수 세 개중에서 한 개를 소거한 후 나머지 두 개의 미지수에 대한 연립방정식을 풀어 두 미지수의 값을 구한다.

② 위에서 구한 두 미지수의 값을 주어진 세 개의 방정식 중의 어느 하나에 대입하여 나머지 미지수의 값을 구한다.

※ 참고: 연립방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c=0$의 근은 직선의 위치관계를 통해 파악할 수 있다.

직선의 위치관계	$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$
평행(불능)	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
일치(부정)	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

(2) 연립이차방정식의 해법 (2원 이차연립방정식)

1) 일차식과 이차식 : 1차식에서 x 또는 y를 구하여 2차식에 대입

2) 2차식과 2차식

(가) 두 식 중에서 어느 한 식이 인수분해 되는가를 조사해 본다.

(나) 가감법을 써서 2차항을 소거하여 1차식으로 나오는가를 조사해 본다.

(다) 상수항을 소거하여 인수분해 되는가를 조사한다.

(라) 합과 곱으로 유도할 수 있는가를 조사해 본다. (대칭형)

※ 대칭형의 경우 $t^2-(x+y)t+xy=0$으로 변형하여 $t=x$ or y임을 이용하여 해결한다.

20. 부정방정식의 해법

(1) 정의 : 미지수의 수보다 방정식의 수가 적을 때에는 그 해가 무수히 많아서 그 근을 정할 수 없는 방정식

(2) 해법

1) 문제 속에 근에 대한 정수의 조건이 주어지면 (　　)×(　　)=정수 꼴로 변형하여 생각해 본다.

2) 문제 속에 근에 대한 실수 조건이 주어지면 $A^2+B^2=0$(단, A, B는 실수)$\Leftrightarrow A=0$, $B=0$을 이용하거나 판별식 $D\geqq 0$을 이용해본다.

3. 공통근의 해법

$f(x)=0, g(x)=0$의 공통근을 α라 하면 $f(\alpha)=0, g(\alpha)=0$이므로 이 두 방정식을 연립하여 최고차항 또는 상수항을 소거한 후 공통근을 구한다.

※ 최고차항의 계수가 1인 3차 방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 공통근이 2개일 때, 공통근을 α,β라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)$이므로

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\delta-\gamma)$이므로 최고차항이 사라지고 $f(x)-g(x)=0$의 해는 α,β가 된다.

21. 부등식의 사칙 계산

x, y의 범위가 $a<x<b$, $c<y<d$로 주어질 때,

(1)
$$\begin{array}{l} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline a+c<x+y<b+d \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline a-d<x-y<b-c \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline ac<xy<bd \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{l} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline \frac{a}{d}<\frac{x}{y}<\frac{b}{c} \end{array}$$

☞주의 : **위의 내용은 a, b, c, d가 양수일 때 성립하는 것이고 양수가 아닐 경우는 반드시 모든 경우를 다 따져 최소값을 좌변에 최대값을 우변에 놓는다.**

22. 일•이차부등식의 해법

1) **일차부등식 $ax>b$의 해는**

(1) $a>0$ 일 때 $x>\frac{b}{a}$

(2) $a<0$일 때 $x<\frac{b}{a}$

(3) $a=0$ 일 때 $\begin{cases} b \geqq 0\text{이면 해는 없다} \\ b<0\text{이면 } x\text{는 모든 실수값} \end{cases}$

2) **이차부등식 해법**

이차부등식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 두 근을 α, β (단, α≧β)라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.

이차부등식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$, $x>\beta$	$x \neq \alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c \geq 0$	$x \leq \alpha$, $x \geq \beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해 없음	해 없음
$ax^2+bx+c \leq 0$	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x=\alpha$	해 없음

23.부등식이 항상 성립할 조건

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립 $a>0$, $D<0$또는$a=b=0$, $c>0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이 항상 성립 $a<0$, $D<0$ 또는 $a=b=0$, $c<0$

☞ 참고 : **모든 실수 x에 대하여**

$ax+b>0$ <=> $a=0$, $b>0$, $ax+b<0$ <=> $a=0$, $b<0$

24.절대 부등식

a, b, c 가 실수일 때,

(가) $a^2 \pm 2ab + b^2 \geqq 0$

(나) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqq 0$ (단, 등호는 $a = b = c$)

(다) (산술평균 기하평균 조화평균)

① $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$ $(a>o,\ b>o)$ (단 등호는 $a=b$)

② $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$, $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$도 성립된다.

☞**참고: 산술평균, 기하평균을 이용하여 최대· 최소값을 구할 때는 반드시 양수이고 합이 주어지고 곱을 구할 때나 그 반대일 때 사용하여 본다는 것을 주의하자.**

(라) Schwarz 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(단, a, b, c, x, y, z는 실수, 등호는 $bx = ay$, $az = cx$, $cy = bz$)

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$

☞ **Schwarz 부등식은 제곱의 합이 주어지고 두 수의 곱의 합을 구할 때 또는 그 반대일 때 사용하여 본다.**

25. 유리식의 계산

(1) 유리식의 변형

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x+\frac{1}{x})^2 - 2 = (x-\frac{1}{x})^2 + 2$$

$$(x-\frac{1}{x})^2 = (x+\frac{1}{x})^2 - 4,\quad (x+\frac{1}{x})^2 = (x-\frac{1}{x})^2 + 4$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x})$$

(2) 부분분수식의 분해

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}),$$

$$\frac{1}{x(x+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\alpha}),\qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(3) 번분수식의 계산(복잡한 것은 맨 아래 → 위로 계산)

$$\frac{\frac{D}{C}}{\frac{B}{A}} = \frac{D}{C} \div \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \times \frac{A}{B} = \frac{AD}{BC}$$

26. 대소 비교

(1) 일반적인 경우는 $A-B$의 부호를 조사한다. $A-B>0 \iff A>B$

(2) 근호 또는 절대값이 있는 경우는 $A^2 - B^2$의 부호를 조사한다.

$A>0$, $B>0$일 때 $A^2 - B^2 > 0 \iff A^2 > B^2 \iff A > B$

(3) 지수 또는 곱의 형태인 경우는 A와 B의 비를 구한다.

$A>0$, $B>0$일 때, $\dfrac{A}{B} > 1 \iff A > B$

27. 무리식의 계산

(1) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

$\sqrt[3]{a^3} = a$ (a의 양•음에 관계없이)

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ <=> $a \leqq 0,\ b \leqq 0$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ <=> $a \geqq 0,\ b < 0$

이 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$가 성립한다.

28. 무리식의 값

(1) $x = a + \sqrt{b}$가 주어지는 경우 $x - a = \sqrt{b} \to (x-a)^2 = b$로 변형한 후 대입한다.

(2) $x = a + \sqrt{b}$, $y = a - \sqrt{b}$로 주어지는 경우 $x + y$, xy의 값을 구한 후 대입한다.

(3) $\sqrt{}$가 무한히 반복되는 경우 결과를 x라 놓고 x의 값을 구한다.

예) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}} = x$라 하면 $x = \sqrt{2x}$, $x^2 = 2x$, $x(x-2) = 0$ $x \neq 0$이므로 $x = 2$

【도형의 방정식】

29.두 점사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 사이의 거리 두 점 $A(a)$, $B(b)$사이의 거리 $\overline{AB}$는 $\overline{AB} = |b - a|$이다.

즉 $a < b$일 때, $\overline{AB} = b - a$, $a > b$일 때 $\overline{AB} = a - b$

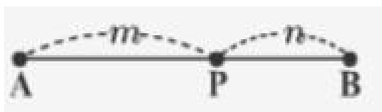
(2) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$사이의 거리 $\overline{AB}$는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

점과좌표	9) 점과 점사이의 거리
	$(a,\ b)$와 $(c,\ d)$사이의 거리 $d = ($ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $)$

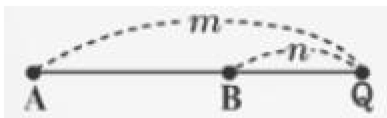
30.선분의 내분점 외분점

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$을 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점을 P, 중점을 M, 외분하는 점을 Q라 할 때



(1) 내분점 : $P\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

(2) 중 점 : $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$



(3) 외분점 : $Q\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m \neq n$)

(4) $\triangle ABC$의 무게중심 G

$A(x_1,\ y_2)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이면 $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

수학공식(수학1)

31. 좌표와 도형 및 자취 방정식

1) 좌표와 도형

도형의 성질을 밝히거나 도형에 관한 문제가 출제될 경우 의외로 좌표를 도입하면 쉽게 풀어지므로 좌표축을 다음 요령으로 정해보자

(1)주어진 도형의 가장 중요한 점을 원점으로 정한다.
(2)주어진 도형의 가장 중요한 직선을 축으로 정한다.
(3)되도록 주어진 도형의 대칭의 관계를 이용하여 축을 정한다.

2) 점의 자취 방정식

(1) 문제에서 주어진 임의의 점을 변수(예를 들면 $(x,\ y)$)로 잡는다
(2) 조건을 만족하는 변수 $x,\ y$사이에 관계식을 구한다.
(3) 변수 $x,\ y$에 제한변역이 있는가를 조사한다.

32.도형에 관한 문제를 풀 때

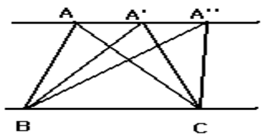
1. 자주 쓰이는 성질

1) △ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
(중선정리 또는 Pappus의 정리)

2) △ABC에서 ∠A의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

3) 삼각형의 등적 변형

$\triangle ABC$의 꼭지점 A를 지나 변 BC에 평행한 직선을 l이라고 하면 $\triangle ABC=\triangle A'BC=\triangle A''BC$



4) 삼각형의 중심

① 내심 ; 세 내각의 이등분선의 교점
② 외심 ; 세 변의 수직이등분선의 교점
③ 무게중심 ; 세 중선의 교점

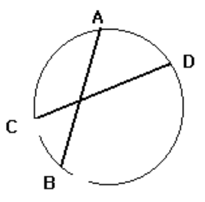
5) 원주각과 중심각 ;같은 원 안에서 동일한 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.
또, 그 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.

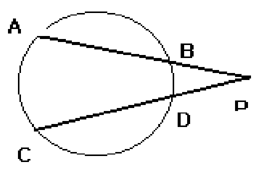
6) 접선의 길이 ; 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선 의 길이는 같다.

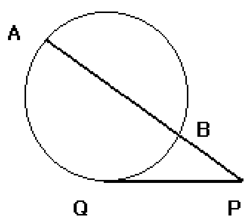
7) 원과 할선, 원과 접선

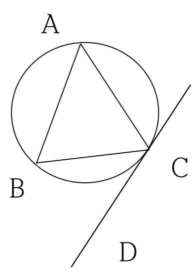
다음 그림에서 점 P가 원의 내부(또는 외부)의 임의의 점일 때

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ 또, 아래그림에서 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PQ}^2$ $\angle BAC=\angle BCD$









※여기에서 빠진 닮음 조건과 합동 조건, 직육면체의 대각선의 길이, 부피, 뿔의 부피, 구의 부피까지 공부하여 주시기 바랍니다.

33.직선의 방정식을 구하는 방법

1)기울기가 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $y=ax+b$

【참고 : 기울기가 m, x절편이 a인 직선은 $y=m(x-a)$】

2) 기울기가 m이고, 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

3)두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)을 지나는 직선의 방정식은

$x_1 \neq x_2$일 때 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, $x_1=x_2$일 때 $x=x_1$(또는 $x=x_2$)

4) x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

【참고】직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각 의 크기를 θ라 하면

(ⅰ) (기울기)= $\tan\theta=a$

(ⅱ) y절편 : 직선이 y축과 만나는 점의 y좌표 b

(ⅲ) x절편 : 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표 $-\dfrac{b}{a}$

34.두 직선의 위치 관계

1) $y=ax+b$와 $y=a'x+b'$의 위치 관계

(1) $a \neq a'$ <=> 한 점에서 만난다

<=> 한 쌍의 근을 갖는다.

(2) $a=a'$, $b \neq b'$ <=> 평행하다.

<=> 근이 없다.(불능)

(3) $a=a'$, $b=b'$ <=> 일치한다.

<=> 근이 무수히 많다.(부정)

(4) $aa'=-1$ <=> 수직이다.

<=> 한 쌍의 근을 갖는다.

2) $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$의 위치관계

1) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ <=> 한 점에서 만난다.

<=> 한 쌍의 근을 갖는다.

2) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ <=> 평행하다.

<=> 근이 없다.(불능)

3) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ <=> 일치하다.

<=> 근이 무수히 많다.(부정)

4) $aa'+bb'=0$ <=> 수직이다

<=> 한 쌍의 근을 갖는다.

35.정점을 지나는 직선

만나는 두 직선 $ax+by+c=0$------① $a'x+b'y+c'=0$--------②

의 교점을 지나는 직선의 방정식은 임의의 상수 h, k에 대하여

$h(ax+bx+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ 으로 나타낸다. (단 h, k는 동시에는 0이 아니다.)

참고 : 계산의 복잡성을 피하기 위해 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $(ax+by+c)m+(a'x+b'y+c')=0$ (m은 상수)로 나타내는 것일 보통이다 이때, 이 직선은 $ax+by+c=0$은 나타내지 못한다.

36. 점과 직선과의 거리

점 $(x_1,\ y_1)$으로부터 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리를 d라 하면 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

☞ **【응용】 두 직선이 이루는 각의 이등분선: 두 직선에 이르는 거리가 같은 점의 자취로 구한다.**

37.원의 정의

한 평면 위의 한 정점에서 일정한 거리에 있는 점의 집합을 **원**이라 하고 정점을 원의 중심, 일정한 거리를 원의 반지름의 길이라 한다.

38.원의 방정식

(1) 점 $(a,\ b)$을 중심으로 하고, 반지름이 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (원의 표준형)

(2) 원의 방정식의 일반형

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (←원이 지나는 세 점이 주어지는 경우에 이용)

(3) 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 지름의 양 끝점인 원

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

39.두 원의 위치 관계

두 원의 반지름을 r, r'와 중심 사이의 거리를 d 라 할 때

(1) $r+r'<d$

<=> 두 원은 서로 밖에 있으며, 공유점이 없다.

(2) $r+r'=d$ <=> 두 원이 한 점에서 외접한다.

(3) $r\sim r'<d<r+r'$ <=> 두 원은 두 점에서 만난다.

(4) $r\sim r'=d$ <=> 두 원은 한 점에서 내접한다.

(5) $r\sim r'>d$ <=> 두 원은 한 쪽이 다른 쪽을 내부에 포함하고 공유점이 없다.

도형

10) 원과 직선의 관계

중심과 직선 사이의 거리가 d일 때, 원과 직선의 교점의 개수

교점의 개수	거리와 반지름

※【참고】**공통내접선과 공통외접선의 길이**

: 두 원의 반지름의 길이가 각각 r, r'이고 중심거리가 d일 때

1) 공통외접선의 길이 $=\sqrt{d^2-(r-r')^2}$

2) 공통내접선의 길이 $=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

40.두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 만나는 두 원

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은 임의의 상수 m에 대하여 $(x^2+y^2+Ax+By+C)m+(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$으로 나타낸다.

특히 $m=-1$ 일 때는 두 원의 공통현의 방정식을 나타낸다.

41.원과 직선의 위치관계

원 $f(x,\ y)=0$과 직선 $y=mx+b$에서 y를 소거한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

(1) D>0 <=> 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) D=0 <=> 원과 직선은 한 점에서 만난다 (접한다.)

(3) D<0 <=> 원과 직선은 만나지 않는다.

수학공식(수학1)

42.이차곡선의 접선의 방정식

1) 이차곡선의 **접점** $(x_1,\ y_1)$**이 주어질** 때는 이차곡선의 x^2, y^2, x, y 대신에 각각

xx_1, yy_1, $\dfrac{x+x_1}{2}$, $\dfrac{y+y_1}{2}$을 대입한다.

예) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선은 $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$이다.

2) 이차곡선에 접하는 직선의 **기울기** m**이 주어질 때**는 접선을 $y=mx+b$라 놓고 b를 판별식 $D=0$임을 이용 하여 구하거나 원의 접선의 방정식을 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$로 외워서 적용해도 된다.

3) **이차곡선 밖의 한 점** $(x_1,\ y_1)$**이 주어질 때**는

접점(α, β)을 잡아서 1)을 이용하여 접선을 구한 다음

ⅰ) $(x_1,\ y_1)$을 대입하여 α, β에 대한 식을 구하고

ⅱ) α, β가 이차곡선 위의 점이므로 이차곡선에 대입하여 식을 세워

ⅰ), ⅱ)을 연립하여 α, β를 구한다.

참고 : 원의 접선의 방정식은 $r=d$의 형태로 구하는 것이 계산이 편리하다.

43.평행이동

1) 점의 평행이동

점 $(x,\ y)$를 x 축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동 시킨 변환 f은

$f:\ (x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+b)$.

2) 도형의 평행이동

방정식 $f(x,y)=0$으로 주어진 도형을 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동시킨

도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$

3)좌표축의 평행이동

좌표축을 평행이동시켜 원점을 $O'(a,\ b)$로 옮길 때, 점 P의 구 좌표 $(x,\ y)$와 신 좌표 $(X,\ Y)$사이에는 $x=X+a$, $y=Y+b$ 관계가 성립된다.

즉, 도형 $f(x,\ y)=0$은 $f(x+a,\ y+b)=0$으로 옮겨진다.

44.대칭이동

① x축에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(x,\ -y)$

② y축에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(-x,\ y)$

③ 원점에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(-x,\ -y)$

④ $y=x$에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(y,\ x)$

⑤ $y=-x$에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(-y,\ -x)$

⑥ 점 $(a,\ b)$에 관한 대칭이동은 $f:\ (x,\ y)\rightarrow(2a-x,\ 2b-y)$

⑦ 직선 $y=ax+b$에 관한 대칭이동은 중점이 직선 위에 있고, 수직임을 이용하여 푼다.

45. $f(x)>0$, $f(x)<0$꼴의 부등식 영역의 도시

1) $f(x, y)=0$의 그래프를 그린다.

2) $f(x, y)=0$위에 없는 임의의 점을 부등식에 대입하여

① 부등식을 만족하면 그 점이 있는 쪽이 구하는 영역이고,

② 부등식을 만족하지 못하면 그 점이 있는 쪽은 그 부등식의 영역이 아니다.

46.부등식의 영역과 최대, 최소

(1) 구하는 것을 변수 x, y라 두고 주어진 조건에 맞게 x, y에 대한 연립부등식을 세운다.

(2) 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

(3) 최대값•최소값을 구하는 식을 $f(x, y)=k$라 놓고 $f(x, y)=k$의 그래프가 연립부등식의 영역을 지나도록 움직이면서 k의 최대값•최소값을 구한다.

▶주로 꺾인 점, 교점, 접점에서 최대값 또는 최소값을 갖는다.
