〈 적분 〉

1. Mapping

적분

피적분 함수에 대한 부정적분을 신속 / 정확히 계산하는 것이 point

미적분학의 기본정리

부정적분 ⟷ 정적분

정적분의 정의 (무한급수)

+ 적분의 계산

미분

부정적분의 정의

정적분으로 정의된 함수

미분의 역과정

A 부정적분의 정의 ⇒ B 부정적분 공식 (계산) ⇒ C 정적분의 정의 ⇒ D 미적분학의 기본정리

⇒ E 정적분 공식 (계산) ⇒ F 정적분으로 정의된 함수 ⇒ G 정적분과 무한급수 ⇒ H 넓이 ⇒ I 부피 ⇒ J 속도 / 위치

미분의 역과정

부정적분의 정의 → 부정적분과 미분 사이의 관계 → 부정적분 관련 공식 → 초월함수의 부정적분

$F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$

⇓

f(x)의 부정적분

미분하여 f(x)가 되는 함수.

정적분과 부정적분의 관계에 의해 정적분을

부정적분으로 이해하게 되므로 기호 역시 일관성 있게 도입!

① $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

② $\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C$

① $\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

② $\int \{ f(x) \pm g(x) \}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

선형성

③ $\int k\,dx = kx + C$

④ $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

$n = -1$; $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

① $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

② $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

③ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

④ $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

⑤ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

⑥ $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

⑦ $\int e^x\,dx = e^x + C$

⑧ $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

⑨ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

tanx / secx / cosecx / cotx

⇓

치환적분법.

<분수함수의 부정적분>

① 분모와 분자의 관계성

② 가분수 ⇒ 진분수 변환

⇓

부분분수 분해

① $y=\sqrt{a^2-x^2} \rightsquigarrow x=a\sin\theta \ \left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

삼각치환 ② $y=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \rightsquigarrow x=a\tan\theta$

치환적분 가장 많은 빈도?

$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$

$\Downarrow$

적분변수 치환의 정당성 (Too hard)

∴ 기계적 변환

$\Downarrow$

합성함수를 미분한 복잡한 부정적분에 대처

곱의 미분법의 역과정

부분적분법

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

뭐가 편해야 함?

$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

로그함수 $\rightsquigarrow$ 다항함수 $\rightarrow$ 삼각함수 $\rightsquigarrow$ 지수함수 (u')

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

< 정적분 >

정적분 정의의 idea?

미분과 구분구적법과 정적분의 가장 큰 차이? (부호 고려)

구분구적법 ~ 정적분의 정의 ~ 미적분학의 기본정리 ~ 정적분의 계산

n등분된 n개의 직사각형의 면적의 합

#1. n등분

#2. Σ 직사각형 or Σ 기둥 $= S_n$

#3. $n \to \infty$

⇓

분할 방식 / 세로 결정 point 와 무관하게

$\lim S_n$ 은 항상 같은 값으로 수렴?

∵ 최대 / 최소 정리에 의해 upper sum & lower sum

⇓ sandwich

$\lim S_n = S$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)}_{\text{세로}}\cdot\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{가로}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x$$

S_{an}

방향성 (부호)를 가진 넓이 : 순면적

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ → 정적분과 미분사이의 관계

② $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ → 미적분학의 기본정리.

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

정의

③ $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

④ $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$

⑤ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

⑥ 구간별 함수의 경우 구간별로 적분?

⑦ $f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

⑧ 평행이동 / 주기함수

치환적분

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$ (구간까지 치환)

$x=g(t)$

부분적분

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

미적분학의 기본정리의 point

함수의 극한으로 연결

정적분으로 정의된 함수

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)\,dt = f(x+a) - f(x)$

③ $\frac{d}{dx}\int_a^x x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + x f(x)$

④ $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t) f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$

⑤ $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$

무한급수 ⇒ x축 사이의 순면적합 ⇒ 정적분 변환

① 가로 × 세로 (넓이)

② 세로 part에 $\frac{k}{n}$

③ 간격일치

① 구간 ⇒ k 대입 후 극한

② 함수 ⇒ 적분함수 결정

정적분의 정의?

★함수식 / 구간 선택의 문제

정적분과 무한급수

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}$$

① $\int_a^{a+p} f(x)\,dx$ ← $a+\frac{p}{n}k = x$

② $\int_0^p f(a+x)\,dx$ ← $\frac{p}{n}k = x$

③ $\int_0^1 p\cdot f(a+px)\,dx$ ← $\frac{k}{n} = x$