수학 영역(가형)

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ②

$\log_3 5\times\log_5 9=\log_3 5\times 2\log_5 3$

$=\dfrac{\log 5}{\log 3}\times\dfrac{2\log 3}{\log 5}=2$

2. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ①

$(\sqrt[3]{3})^2\div 27^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}\div 3^{3\times\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{6}}$

3. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ③

$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$

제2사분면에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

4. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ③

반지름의 길이가 3, 중심각의 크기가 $\dfrac{4}{3}\pi$인

부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3^2\times\dfrac{4}{3}\pi=6\pi$

5. 이해 능력 – 수열 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_2=3d=12$이므로 $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$

따라서 $a_{10}=4\times 10-3=37$

6. 이해 능력 – 수열 정답 ②

$a_1=a$라 하면 $a_{n+1}=3a_n+2$에서

$a_2=3a_1+2=3a+2$

$a_3=3a_2+2=3(3a+2)+2=9a+8$

$a_4=3a_3+2=3(9a+8)+2=27a+26=80$

따라서 $a=a_1=2$

7. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ④

$\log a=1+0.48=\log 10+\log 3.02=\log 30.2$

따라서 $a=30.2$

$b=\log 0.302=\log\dfrac{3.02}{10}=\log 3.02-\log 10$

$=0.48-1=-0.52$

따라서 $a+b=30.2-0.52=29.68$

8. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ④

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면의

각이다. 따라서 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 이 부채꼴의 호의

길이는 $2\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

9. 이해 능력 – 수열 정답 ⑤

가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 1인 직사각형을

한 변의 길이가 $\dfrac{1}{n}$인 정사각형으로 나누려면

직사각형의 가로는 $2n$등분, 세로는 n등분한다.

따라서 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{n}$인 정사각형의 개수는

$a_n=n\times 2n=2n^2$이다.

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}2n^2=2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}=770$

10. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ①

$x^3=\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-3\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}+3\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{2}{3}}-\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=2-3\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}-3x$

따라서

$x^3+3x+1=\dfrac{3}{2}-3x+3x+1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$

11. 수학 외적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ④

$\log v_1=\dfrac{1}{2}(k+\log M_1-\log R_1)$ …… ㉠

$\log v_2=\dfrac{1}{2}(k+\log 8M_1-\log 2R_1)$

$=\dfrac{1}{2}(k+\log M_1+\log 8-\log R_1-\log 2)$

$=\dfrac{1}{2}(k+\log M_1-\log R_1+\log 4)$

$=\dfrac{1}{2}(k+\log M_1-\log R_1)+\log 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\log\dfrac{v_1}{v_2}=\log v_1-\log v_2=-\log 2=\log\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{1}{2}$

12. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ④

로그의 진수 조건에서

$x^2-x-12>0$, $(x+3)(x-4)>0$

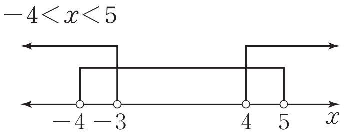
따라서 $x<-3$ 또는 $x>4$ …… ㉠

부등식 $\log_2(x^2-x-12)<3$에서

$x^2-x-12<2^3=8$

$x^2-x-20<0$, $(x+4)(x-5)<0$

따라서 $-4<x<5$ …… ㉡



㉠과 ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$-4<x<-3$ 또는 $4<x<5$

따라서

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(-4)+(-3)+4+5=2$

13. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 정답 ②

$f(x)=x^3+kx^2+(2k-1)x+3$으로 놓으면

다항식 $f(x)$를 $x-1$, x, $x+1$로 나누었을 때의

나머지가 각각 a, b, c이므로 나머지정리에 의해

$a=f(1)=1+k+(2k-1)+3=3k+3$

$b=f(0)=3$

$c=f(-1)=-1+k+(-2k+1)+3=-k+3$

a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$에서 $3^2=(3k+3)(-k+3)$

$3k^2-6k=0$, $3k(k-2)=0$

따라서 $k=2$

14. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

로그의 진수 조건에서 $4+x>0$, $3-x>0$

따라서 $-4<x<3$ …… ㉠

$\log(4+x)+\log(3-x)=1$

$\log(4+x)(3-x)=1$에서 $(4+x)(3-x)=10$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=1$ …… ㉡

㉡은 모두 ㉠을 만족시키므로

$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+1^2=5$

15. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 정답 ③

두 집합 X, Y는

$X=\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

집합 X의 원소 $1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n$을

집합 Y의 원소 1, 2, 3, 6에 대응시킬 때,

그 경우의 수는 정의역의 원소 n개에 대하여

각각 4이므로 $a_n=4^n$

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}4^n=\frac{4(4^{10}-1)}{4-1}$

$=\dfrac{4}{3}(2^{20}-1)=\dfrac{1}{3}(2^{22}-4)$

16. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ①

$\cos A=-\dfrac{3}{7}$이므로 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2$

$=1-\dfrac{9}{49}=\dfrac{40}{49}$

따라서 $\sin A=\sqrt{\dfrac{40}{49}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ ($\because \sin A>0$)

$\overline{BC}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에

의해

$a^2=6^2+7^2-2\times 6\times 7\times\cos A$

$=36+49-84\times\left(-\dfrac{3}{7}\right)=121$

따라서 $a=\sqrt{121}=11$ ($\because a>0$)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라

하면 사인법칙에 의해

$2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{11}{\frac{2\sqrt{10}}{7}}=\dfrac{77\sqrt{10}}{20}$

따라서 $R=\dfrac{77\sqrt{10}}{40}$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

$f(x)=\log_3 3x+a=1+\log_3 x+a$이고

$f(1)=1+a$, $f(27)=4+a$이므로

$1\le x\le 27$에서 $1+a\le f(x)\le 4+a$

함수 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$f(x)=t$로 놓으면

$1\le x\le 27$에서 $1+a\le t\le 4+a$

이때, 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가할 때,

y의 값은 감소하므로

함수 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=-t+5$는

$t=1+a$일 때 최대이고, $t=4+a$일 때 최소이다.

따라서

$g(4+a)=-4-a+5=-a+1=10$에서

$a=-9$이므로 구하는 최댓값은

$g(1+a)=g(-8)=-(-8)+5=13$

[다른 풀이]

$(g\circ f)(x)=-(\log_3 3x+a)+5$

$=-\log_3 3x-a+5$

$=\log_{\frac{1}{3}}x-a+4$

이때 함수 $(g\circ f)(x)$는 x의 값이 증가할 때,

y의 값은 감소하므로 $1\le x\le 27$에서 $x=1$일 때

최대이고 $x=27$일 때 최소이다.

$(g\circ f)(27)=\log_{\frac{1}{3}}27-a+4=-a+1$에서

$-a+1=10$, $a=-9$

따라서 최댓값은 $(g\circ f)(1)=\log_{\frac{1}{3}}1+9+4=13$

18. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ②

$\overline{AC}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해 $\cos A=\frac{4^2+b^2-(\sqrt{6})^2}{2\times4\times b}$

조건 (나)에서 $\cos A=\frac{7}{8}$이므로 $\frac{7}{8}=\frac{b^2+10}{8b}$

$b^2-7b+10=(b-2)(b-5)=0$

따라서 $b=2$ 또는 $b=5$

이때 $b=2$이면 B는 예각이므로 $\cos B>0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $b=5$

이때 $\overline{CD}=1$이므로 $\overline{AD}=5-1=4$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos A$

$=16+16-32\times\frac{7}{8}=4$

따라서 $\overline{BD}=\sqrt{4}=2$

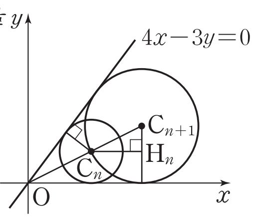
19. 연역적 추론 능력(증명) – 수열 정답 ③

원 O_n의 중심의 x좌표를 a_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

원 O_n의 중심을 C_n이라 하면 $C_n(a_n,\ r_n)$이다.

원 O_{n+1}은 원 O_n의 중심을 지나므로 $\overline{C_nC_{n+1}}=r_{n+1}$

점 C_n에서 점 C_{n+1}을 지나고 x축에 수직인 직선에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 직각삼각형 $C_nH_nC_{n+1}$에서 $\overline{C_nH_n}^2+\overline{C_{n+1}H_n}^2=\overline{C_{n+1}C_n}^2$



$(a_{n+1}-a_n)^2+(r_{n+1}-r_n)^2=r_{n+1}^2$ ⋯⋯ ㉠

또한 점 C_n과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 r_n이므로 $r_n=\frac{|4a_n-3r_n|}{\sqrt{16+9}}$, $|4a_n-3r_n|=5r_n$

$4a_n-3r_n=5r_n$ 또는 $4a_n-3r_n=-5r_n$

따라서 $a_n=\boxed{2}\times r_n$ ($\because$ $a_n>0$, $r_n>0$) ⋯⋯ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$(2r_{n+1}-2r_n)^2+(r_{n+1}-r_n)^2=r_{n+1}^2$

$5(r_{n+1}-r_n)^2=r_{n+1}^2$

$\sqrt{5}(r_{n+1}-r_n)=r_{n+1}$ 또는 $\sqrt{5}(r_{n+1}-r_n)=-r_{n+1}$

$\sqrt{5}r_n=(\sqrt{5}-1)r_{n+1}$ ($\because$ $r_{n+1}>r_n$)

$r_{n+1}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}r_n$, $r_{n+1}=\boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{4}}\times r_n$

한편, $a_1=1$이므로 $r_1=\frac{1}{2}\times a_1=\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$인 등비수열이므로 수열 $\{r_n\}$의 일반항은

$r_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$

따라서

$S_n=\pi(r_n)^2=\frac{\pi}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^{2(n-1)}$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{15+5\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{15+5\sqrt{5}}{8}\right)^{k-1}$

$=\frac{\frac{\pi}{4}\left\{\left(\frac{15+5\sqrt{5}}{8}\right)^n-1\right\}}{\frac{15+5\sqrt{5}}{8}-1}$

$=\frac{2\pi}{7+5\sqrt{5}}\times\left\{\boxed{\left(\frac{15+5\sqrt{5}}{8}\right)^n-1}\right\}$

따라서

$p=2$, $q=\frac{5+\sqrt{5}}{4}$, $f(n)=\left(\frac{15+5\sqrt{5}}{8}\right)^n-1$이므로

$q+f(p-1)=\frac{5+\sqrt{5}}{4}+\frac{15+5\sqrt{5}}{8}-1$

$=\frac{17+7\sqrt{5}}{8}$

20. 연역적 추론 능력(증명) – 지수함수와 로그함수 정답 ⑤

ㄱ. (참) $g(a)=h(a)=1$이므로

두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$는 모두 점 $(a,\ 1)$을 지난다.

이때, 두 곡선의 교점은 1개뿐이므로 점 A의 좌표는 $(a,\ 1)$이다.

ㄴ. (참) $k=4$이므로

$B(0,\ 4)$, $C(2,\ 4)$, $D(a+2,\ 4)$에서

$\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=a$

$\overline{BC}:\overline{CD}=1:4$에서

$2:a=1:4$이므로 $a=8$이다.

ㄷ. (참) $B(0,\ k)$, $C(\log_2 k,\ k)$, $D(a+\log_2 k,\ k)$이므로 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACD의 넓이가 같으려면 $\overline{BC}=\overline{CD}$이어야 한다.

$\log_2 k=a$이므로 $k=2^a$이다.

한편, a와 k는 정수이고

$2^9=512$, $2^{10}=1024>1000$이므로

조건을 만족시키는 정수 k는 2, 2^2, $\cdots$, 2^9의 9개이다.

즉, 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ k)$의 개수는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 2^2)$, $\cdots$, $(9,\ 2^9)$의 9이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수 정답 ①

마름모 ABCD의 한 변의 길이가 a이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2\sin\theta$

따라서 마름모 ABCD의 넓이는

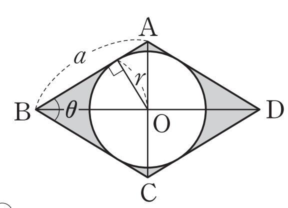
$2\times\frac{1}{2}a^2\sin\theta=a^2\sin\theta$ ⋯⋯ ㉠

한편, 마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하고, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

삼각형 ABO의 넓이는 $\frac{1}{2}ar$이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$4\times\frac{1}{2}ar=2ar$ ⋯⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $a^2\sin\theta=2ar$이므로 $r=\frac{a}{2}\sin\theta$

따라서

$S(\theta)=a^2\sin\theta-\pi r^2=a^2\sin\theta-\frac{\pi a^2}{4}\sin^2\theta$

$=-\frac{\pi a^2}{4}\left(\sin\theta-\frac{2}{\pi}\right)^2+\frac{a^2}{\pi}$

이므로 함수 $S(\theta)$는 $\sin\theta=\frac{2}{\pi}$일 때

최댓값 $\frac{a^2}{\pi}$을 갖는다.

따라서 함수 $S(\theta)$의 최댓값이 2이므로

$\frac{a^2}{\pi}=2$이고 $a>0$이므로 $a=\sqrt{2\pi}$이다.

22. 이해 능력 – 수열 정답 11

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2b_k+1)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=3\times3-2\times4+10\times1$

$=11$

23. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 5

$2^{x+2}=3\times2^x+32$, $4\times2^x=3\times2^x+32$

$2^x=32=2^5$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=5$이다.

24. 이해 능력 – 삼각함수 정답 4

함수 $y=a\cos bx$의 최댓값이 2이고, 최솟값이 -2이므로 $|a|=2$

이때, $a>0$이므로 $a=2$

함수 $y=a\cos bx$의 주기가

$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$

따라서 $b=2$

따라서 $ab=2\times2=4$

25. 이해 능력 – 수열 정답 18

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 a, $r(r>1)$이라 하면

$a_6=a_1+484$에서 $ar^5=a+484$

$a(r^5-1)=484$ ⋯⋯ ㉠

$S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}=242$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{484}{r-1}=242$, $r-1=2$

따라서 $r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$a\times(3^5-1)=a(243-1)=484$

따라서 $a=2$이므로

$a_3=2\times3^2=18$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 정답 127

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

이므로

$\sum_{k=1}^{m}\log_2 a_k$

$=\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{k}{k+1}$

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{m-1}{m}$

$+\log_2\frac{m}{m+1}$

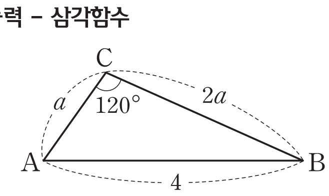
$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m-1}{m}\times\frac{m}{m+1}\right)$

$=\log_2\frac{1}{m+1}=-7$

따라서 $\frac{1}{m+1}=2^{-7}$, $m+1=2^7$이므로

$m=2^7-1=128-1=127$

27. 이해 능력 – 삼각함수 정답 15



$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=2a$라 하면 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의해 $\cos C=\frac{a^2+(2a)^2-4^2}{2\times a\times2a}$

$\cos C=\cos120°=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}=\frac{5a^2-16}{4a^2}$, $7a^2=16$

따라서 $a=\frac{4}{\sqrt{7}}$ ($\because$ $a>0$)이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times2a\times\sin120°=a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

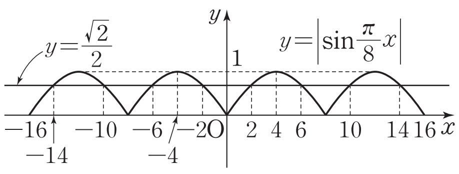
$=\frac{16}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{7}$

따라서 $p=7$, $q=8$이므로 $p+q=7+8=15$

28. 이해 능력 - 삼각함수 정답 20

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고, 함수 $y=\left|\sin\frac{\pi}{8}x\right|$의 주기는

$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=8$이다.



$-16\le x\le 16$일 때 $-2\pi\le\frac{\pi}{8}x\le 2\pi$이고,

$0\le\frac{\pi}{8}x\le\pi$에서 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\le\frac{\pi}{8}x\le\pi$에서 부등식 $\left|\sin\frac{\pi}{8}x\right|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$를

만족시키는 x의 값의 범위는 $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{8}x\le\frac{3}{4}\pi$

따라서 $0\le x\le 8$에서 부등식 $\left|\sin\frac{\pi}{8}x\right|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$를

만족시키는 x의 값의 범위는 $2\le x\le 6$이다.

이때 함수 $y=\left|\sin\frac{\pi}{8}x\right|$의 주기는 8이므로

$-16\le x\le 16$에서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-14\le x\le -10$ 또는 $-6\le x\le -2$ 또는

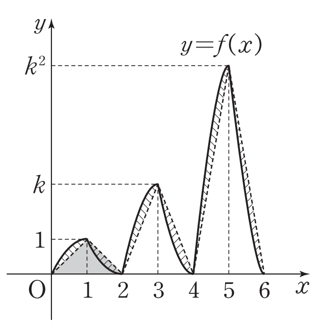
$2\le x\le 6$ 또는 $10\le x\le 14$이다.

따라서 구하는 정수 x의 개수는 $4\times 5=20$이다.

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 7

$\log_2\frac{2}{x}=1-\log_2 x$이고 $y=\log_2 x$의 그래프와

$y=-\log_2 x$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$이다.

조건 (나)에서 $f(x)=kf(x-2)$이므로

$2\le x\le 4$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 위와 같은 방법으로

$\frac{1}{2}\times 2\times k=k$

$4\le x\le 6$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 위와 같은 방법으로

$\frac{1}{2}\times 2\times k^2=k^2$

따라서 $0\le x\le 6$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k^2+k+1이다.

따라서

$k^2+k+1=\frac{39}{4}$, $4k^2+4k-35=0$

$(2k+7)(2k-5)=0$

따라서 $k=\frac{5}{2}$ ($\because k>0$)

따라서 $p=2$, $q=5$, $p+q=7$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 정답 104

수열 $\{a_n\}$은 공차가 양수인 등차수열이므로

$a_k<a_{k+1}<a_{k+2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(i) $x<a_k$일 때,

$f(x)=|x-a_k|+|x-a_{k+1}|+|x-a_{k+2}|$
$=-(x-a_k)-(x-a_{k+1})-(x-a_{k+2})$
$=-3x+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$
$=-3x+3a_k+3d$

(ii) $a_k\le x<a_{k+1}$일 때,

$f(x)=|x-a_k|+|x-a_{k+1}|+|x-a_{k+2}|$
$=x-a_k-(x-a_{k+1})-(x-a_{k+2})$
$=-x-a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$
$=-x+a_k+3d$

(iii) $a_{k+1}\le x<a_{k+2}$일 때,

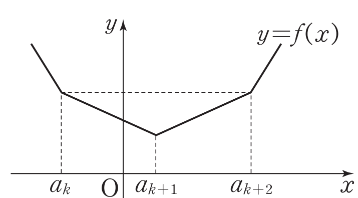
$f(x)=|x-a_k|+|x-a_{k+1}|+|x-a_{k+2}|$
$=x-a_k+x-a_{k+1}-(x-a_{k+2})$
$=x-a_k-a_{k+1}+a_{k+2}$
$=x-a_k+d$

(iv) $x\ge a_{k+2}$일 때,

$f(x)=|x-a_k|+|x-a_{k+1}|+|x-a_{k+2}|$
$=x-a_k+x-a_{k+1}+x-a_{k+2}$
$=3x-(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})$
$=3x-3a_k-3d$

(i)~(iv)와 조건 (가)에서

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=a_{k+1}$에서

최솟값 8을 가지므로 (iii)에서

$f(a_{k+1})=a_{k+1}-a_k+d=2d=8$

따라서 $d=4$

$a_k<0<a_{k+1}$이므로 (ii)에서

$f(0)=a_k+3d=a_1+(k-1)d+3d$

조건 (다)에서

$f(0)=|a_1|-14=-a_1-14$ ($\because a_1<0$)

따라서 $2a_1+(k+2)d+14=0$

$a_1+2k+11=0$ ($\because d=4$) …… ㉠

$f(4k)=|4k-a_k|+|4k-a_{k+1}|+|4k-a_{k+2}|$
$=|4k-a_1-(k-1)d|+|4k-a_1-kd|$
$+|4k-a_1-(k+1)d|$
$=|4k-a_1-4(k-1)|+|4k-a_1-4k|$
$+|4k-a_1-4(k+1)|$
$=|-a_1+4|+|-a_1|+|-a_1-4|$
$=|a_1-4|+|a_1|+|a_1+4|$
$=10k+5$

① $a_1\le -4$일 때,

$-a_1+4-a_1-a_1-4=10k+5$

$3a_1+10k+5=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1=-25$, $k=7$

② $-4<a_1<0$일 때,

$-a_1+4-a_1+a_1+4=10k+5$

$a_1+10k-3=0$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $k=\frac{7}{4}$이고 k는 자연수가 아니므로 모순이다.

①, ②에서 $a_1=-25$, $k=7$이므로

$a_n=-25+(n-1)\times 4=4n-29$

따라서

$\sum_{n=k}^{2k}a_n=\sum_{n=7}^{14}(4n-29)=\frac{8\{(-1)+27\}}{2}=104$

수학 영역(나형)

1. 계산 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ②

$\log_2 32+\log_2\frac{1}{2}=5\log_2 2-\log_2 2$
$=5-1=4$

2. 계산 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ①

$\sqrt[3]{25}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=(5^2)^{\frac{1}{3}}\times(5^{-1})^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{2}}$
$=5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{6}}$

3. 가형 3번과 동일 정답 ③

4. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ③

반지름의 길이가 8, 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인

부채꼴의 호의 길이는 $8\times\frac{3}{4}\pi=6\pi$

5. 이해 능력 - 수열 정답 ⑤

세 수 $a+1$, $2a$, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$(a+1)+4=2\times 2a$, $a+5=4a$, $3a=5$

따라서 $a=\frac{5}{3}$

6. 가형 5번과 동일 정답 ⑤

7. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ③

$\sin A=\sin 30°=\frac{1}{2}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=12$이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라

하면 사인법칙에 의해 $2R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24$

따라서 $R=12$

8. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ②

$8^{x-1}=2^{x+5}$, $(2^3)^{x-1}=2^{x+5}$

$2^{3x-3}=2^{x+5}$에서 $3x-3=x+5$, $2x=8$

따라서 $x=4$

9. 가형 24번과 동일 정답 ⑤

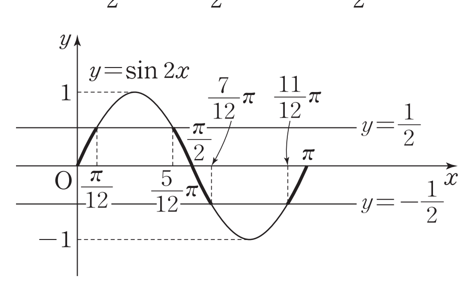
10. 가형 9번과 동일 정답 ⑤

11. 가형 7번과 동일 정답 ④

12. 가형 11번과 동일 정답 ④

13. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ④

$|\sin 2x|\le\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}\le\sin 2x\le\frac{1}{2}$ ……㉠



따라서 $0\le x\le\pi$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 해는 위의 그림에서

$0\le x\le\frac{\pi}{12}$ 또는 $\frac{5}{12}\pi\le x\le\frac{7}{12}\pi$

또는 $\frac{11}{12}\pi\le x\le\pi$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 $\frac{19}{24}\pi$이다.

14. 가형 12번과 동일 정답 ④

15. 이해 능력 – 수열 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_3=\dfrac{3\{2\times2+(3-1)d\}}{2}=6+3d$

$S_{10}=\dfrac{10\{2\times2+(10-1)d\}}{2}=20+45d$

$S_3=S_{10}$이므로

$6+3d=20+45d$, $42d=-14$

따라서 $d=-\dfrac{1}{3}$이므로

$a_{16}=2+(16-1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-3$

16. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2이므로

일반항은 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$

점 P_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이고,

x좌표는 a_n이므로

$\mathrm{P}_n(2n+1,\ (2n+1)^2)$, $\mathrm{P}_{n+1}(2n+3,\ (2n+3)^2)$

두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{(2n+3)^2-(2n+1)^2}{(2n+3)-(2n+1)}$

$=\dfrac{(4n^2+12n+9)-(4n^2+4n+1)}{2}$

$=4n+4=20$

따라서 $n=4$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 정답 ①

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인

등비수열이고, $a_1=1$이므로

$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

$b_n=3(a_n)^2=3(2^{n-1})^2$

$\quad=3\times(2^2)^{n-1}=3\times4^{n-1}$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 4인

등비수열이므로

$S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$에서

$S_{10}=4^{10}-1=2^{20}-1$

따라서

$\log_2(S_{10}+1)=\log_2 2^{20}=20\log_2 2=20$

18. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가

원점에서 만나므로 $f(0)=0$이다.

즉, $\log_2 4+b=0$이므로 $b=-2$

점 P의 좌표를 $(k,\ k)(k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2=2k^2=(3\sqrt{2})^2=18$에서

$k=3$이므로 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

따라서 $f(3)=3$이므로

$\log_2(3a+4)-2=3$, $\log_2(3a+4)=5$

$3a+4=2^5=32$에서 $a=\dfrac{28}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{28}{3}-2=\dfrac{22}{3}$

19. 가형 18번과 동일 정답 ②

20. 가형 19번과 동일 정답 ③

21. 가형 20번과 동일 정답 ⑤

22. 가형 1번과 동일 정답 2

23. 가형 22번과 동일 정답 11

24. 이해 능력 – 삼각함수 정답 6

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제3사분면의

각이다.

따라서 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$이므로 이 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{4}{3}\pi=6\pi$

따라서 $a=6$

25. 이해 능력 – 수열 정답 192

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2=a_1r=6$, $a_4=a_1r^3=24$이므로

$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{a_1r^3}{a_1r}=r^2=4$

이때, 공비 r는 양수이므로 $r=2$

$a_2=a_1r=2a_1=6$에서 $a_1=3$

따라서 $a_7=3\times2^6=192$

26. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 37

$y=4^x-2^{x+2}+a$ ……㉠

이때, $2^x=t$로 놓으면 $0\le x\le3$이므로 $1\le t\le8$

㉠에서 $y=t^2-4t+a=(t-2)^2+a-4$이므로

주어진 함수는 $t=2$일 때, 최솟값 $a-4$,

$t=8$일 때, 최댓값 $32+a$를 갖는다.

따라서 $a-4=1$에서 $a=5$이므로

최댓값은 $32+5=37$

27. 가형 26번과 동일 정답 127

28. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 42

주어진 방정식에서 $2^x=t(t>0)$으로 놓으면

방정식 $t^2-2(\log_2 a)t+2\log_2 a+3=0$은

서로 다른 2개의 양의 실근을 가져야 한다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(\log_2 a)^2-2\log_2 a-3>0$

$(\log_2 a+1)(\log_2 a-3)>0$

$\log_2 a<-1$ 또는 $\log_2 a>3$ ……㉠

또한, 두 근이 모두 양수이어야 하므로

두 근의 합과 곱은 모두 양수이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2\log_2 a>0$, $2\log_2 a+3>0$ ……㉡

㉠과 ㉡에서 $\log_2 a>3$, 즉 $a>8$

따라서 구하는 50 이하의 자연수 a의 개수는

$50-8=42$

29. 가형 27번과 동일 정답 15

30. 이해 능력 – 삼각함수 정답 6

마름모 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin\theta=2\sin\theta$

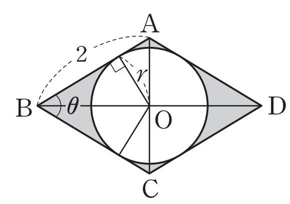
따라서 마름모 ABCD의 넓이는

$2\times2\sin\theta=4\sin\theta$ …… ㉠

한편, 마름모 ABCD

의 두 대각선의 교점을 O라 하고, 원의 반지름의

길이를 r라 하면



삼각형 ABO의

넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times r=r$이므로

마름모 ABCD의

넓이는 $4\times r=4r$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $4\sin\theta=4r$이므로 $\sin\theta=r$이다.

따라서

$S(\theta)=4\sin\theta-\pi r^2=4\sin\theta-\pi\sin^2\theta$

$\qquad=-\pi\left(\sin\theta-\dfrac{2}{\pi}\right)^2+\dfrac{4}{\pi}$

따라서 $S(\theta)$는 $\sin\theta=\dfrac{2}{\pi}$일 때, 최댓값 $\dfrac{4}{\pi}$를

가지므로 $a=\dfrac{2}{\pi}$, $b=\dfrac{4}{\pi}$이다.

따라서 $\pi\times(a+b)=\pi\times\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\right)$

$\qquad=6$