



## 02 부등식

### 1. 삼차부등식과 사차부등식

- (1) 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여

$$f(x) > 0, f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$$

의 꼴로 정리하였을 때,  $f(x)$ 가 삼차의 다항식이면 삼차부등식이라 하고,  $f(x)$ 가 사차의 다항식이면 사차부등식이라 한다. 또한 삼차 이상의 부등식을 통틀어 고차부등식이라 한다.

- (2) 고차부등식을 푸는 순서

- ① 부등식의 최고차항의 계수가 양수가 되도록 항을 한 쪽으로 이항하여

$$f(x) > 0, f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$$

과 같은 꼴로 만든다.

- ②  $f(x)$ 를 실수의 범위에서 인수분해한 다음, 방정식  $f(x) = 0$ 의 해를 구한다.

- ③ 표나 수직선을 이용하여 방정식  $f(x) = 0$ 의 해를 경계로 하여 구간을 나눈 다음,  $f(x)$ 의 부호를 조사하여 부등식의 해를 구한다.

**예** 삼차부등식  $x^3 > x$ 의 해를 구해 보자.

부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3 - x > 0$$

..... ①  $f(x) > 0$ 의 꼴로 만든다.

$f(x) = x^3 - x$ 로 놓고 인수분해하면

$$f(x) = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

방정식  $f(x) = 0$ 의 해는  $x = -1$  또는  $x = 0$  또는  $x = 1$  ..... ②  $f(x) = 0$ 의 해를 구한다.

여기서 방정식  $f(x) = 0$ 의 해  $x = -1, x = 0, x = 1$ 을 경계로  $f(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

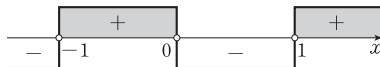
| 인수 \ x의 범위 | $x < -1$ | $x = -1$ | $-1 < x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < 1$ | $x = 1$ | $x > 1$ |
|------------|----------|----------|--------------|---------|-------------|---------|---------|
| $x+1$      | -        | 0        | +            | +       | +           | +       | +       |
| $x$        | -        | -        | -            | 0       | +           | +       | +       |
| $x-1$      | -        | -        | -            | -       | -           | 0       | +       |
| $f(x)$     | -        | 0        | +            | 0       | -           | 0       | +       |

따라서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는

..... ③ 표나 수직선을 이용하여  $f(x)$ 의 부호를 조사하고 부등식의 해를 구한다.

$$-1 < x < 0 \text{ 또는 } x > 1$$

**참고** 고차부등식을 풀 때, 표 대신 수직선을 이용하면 편리하다.



- (3) 제곱꼴의 인수 또는 부호가 일정한 인수가 있는 고차부등식의 풀이

$$\textcircled{1} (x-a)^2 f(x) > 0 \iff f(x) > 0 \text{이고 } x \neq a$$

$$\textcircled{2} (x-a)^2 f(x) \geq 0 \iff f(x) \geq 0 \text{ 또는 } x = a$$

$$\textcircled{3} (x-a)^2 f(x) < 0 \iff f(x) < 0 \text{이고 } x \neq a$$

$$\textcircled{4} (x-a)^2 f(x) \leq 0 \iff f(x) \leq 0 \text{ 또는 } x = a$$

$$\textcircled{5} \text{ 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) > 0 \text{일 때, } f(x)g(x) > 0 \iff g(x) > 0$$

## 예제 1

## 고차부등식

부등식  $x^3 - 5x \leq 2x^2 - 6$ 을 만족시키는 모든 양의 정수  $x$ 의 값의 합은?

- ① 3                      ② 6                      ③ 9                      ④ 12                      ⑤ 15

- 풀이 전략** (1) 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여  $f(x) \leq 0$ 의 꼴로 만든다.  
 (2)  $f(x)$ 를 실수의 범위에서 인수분해하여 방정식  $f(x) = 0$ 의 해를 구한다.  
 (3) 방정식  $f(x) = 0$ 의 해를 경계로 하여 구간을 나눈 다음 각 구간에서  $f(x)$ 의 부호를 조사하여 부등식의 해를 구한다.

**풀이** 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 내림차순으로 정리하면

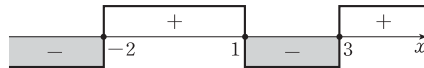
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면  $f(1) = 0$ 이므로

조립제법을 이용하여  $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

여기서 방정식  $f(x) = 0$ 의 해  $x = -2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ 을 경계로  $f(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는

$$x \leq -2 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 3$$

이므로 주어진 부등식을 만족시키는 양의 정수  $x$ 는 1, 2, 3이다.

그러므로 구하는 모든 양의 정수  $x$ 의 값의 합은  $1+2+3=6$

**답** ②

정답과 풀이 12쪽

[3-235-016]

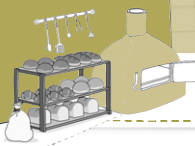
**유제 1** 부등식  $(x+2)(x-1)^2(x-5) < 0$ 을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는?

- ① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

[3-235-017]

**유제 2** 부등식  $x^3 + 15x \leq 7x^2 + 9$ 를 만족시키는 모든 양의 정수  $x$ 의 값의 합은?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7



## 02 부등식

### 2. 분수부등식

(1) 부등식  $\frac{x}{x+3} < 2$ ,  $x+1 \geq \frac{4}{x-2}$  와 같이 분모에 미지수가 들어 있는 분수식을 포함하고 있는 부등식을 분수

부등식이라 한다. 또 일차부등식, 이차부등식, 고차부등식 및 분수부등식을 통틀어 유리부등식이라 한다.

(2) 분수부등식을 푸는 순서

① 주어진 분수부등식을 정리하여 다음과 같은 꼴로 만든다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

② 부등식의 양변에  $\{g(x)\}^2$ 을 곱하여 일차부등식, 이차부등식 또는 고차부등식으로 만든다.

③ ②의 부등식을 풀어 구한 해 중에서 방정식  $g(x) = 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은 제외한다.

**예** 분수부등식  $x+1 \leq \frac{6}{x}$ 의 해를 구해 보자.

우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$x+1 - \frac{6}{x} \leq 0, \frac{x^2+x-6}{x} \leq 0$$

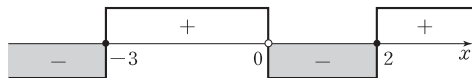
$$\frac{(x+3)(x-2)}{x} \leq 0$$

양변에  $x^2$ 을 곱하면

$$x(x+3)(x-2) \leq 0, x \neq 0$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는

$$x \leq -3 \text{ 또는 } 0 < x \leq 2$$



(3) 일정한 부호의 인수를 포함한 분수부등식

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) > 0$ 이면

$$\textcircled{1} \frac{g(x)}{f(x)} > 0 \iff g(x) > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{g(x)}{f(x)} \geq h(x) \iff g(x) \geq f(x)h(x)$$

**참고** 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식을 절대부등식이라 한다. 다음은 절대부등식의 예이다.

$$\textcircled{1} x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$$

$$\textcircled{2} x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

(4) 분수부등식의 활용

① 구하는 값을 미지수  $x$ 로 놓는다. 이때 문제의 조건에 맞게  $x$ 의 값의 범위를 정한다.

② 주어진 조건을 이용하여  $x$ 에 대한 분수부등식을 세운다.

③ 부등식을 풀고, 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

## 예제 2

## 분수부등식

분수부등식

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} \leq \frac{7}{x^2-5x+6} - 1$$

을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

**풀이 전략** (1) 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ 의 꼴로 만든다.

(2) 부등식의 양변에  $\{g(x)\}^2$ 을 곱하여 고차부등식으로 만든다.

(3) (2)의 부등식을 풀어 구한 해 중에서 방정식  $g(x) = 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은 제외한다.

**풀이** 주어진 부등식은

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} \leq \frac{7}{(x-2)(x-3)} - 1$$

이므로 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3} - \frac{7}{(x-2)(x-3)} + 1 \leq 0$$

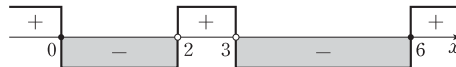
$$\frac{(x-3) - 2(x-2) - 7 + (x^2 - 5x + 6)}{(x-2)(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x}{(x-2)(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x(x-6)}{(x-2)(x-3)} \leq 0$$

양변에  $(x-2)^2(x-3)^2$ 을 곱하면

$$x(x-2)(x-3)(x-6) \leq 0, x \neq 2, x \neq 3$$



따라서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $0 \leq x < 2$  또는  $3 < x \leq 6$ 이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는 0, 1, 4, 5, 6의 5이다. **답** ⑤

정답과 풀이 12쪽

[3-235-018]

유제

3

분수부등식  $\frac{x^2-9}{x^2+x+2} < \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 값의 합은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

## 02 부등식

### 3. 함수의 그래프와 분수부등식

- (1) 분수부등식  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ 의 양변에  $\{g(x)\}^2$ 을 곱하여 일차부등식, 이차부등식 또는 고차부등식으로 만든다.
- (2) (1)에서 정리한 부등식을 만족시키는  $f(x)$ ,  $g(x)$  등의 값의 범위 또는 그 관계식을 찾는다.
- (3) 두 함수  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$ 의 그래프로부터 범위 또는 그 관계식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위를 찾는다.

예 삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 분수부등식  $\frac{f(x)}{x-1} \leq 0$ 의 해를

구해 보자.

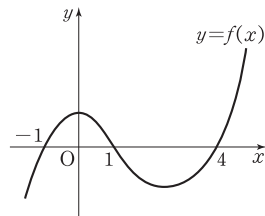
주어진 분수부등식의 양변에  $(x-1)^2$ 을 곱하면  $(x-1)f(x) \leq 0$ ,  $x \neq 1$

$$\therefore \begin{cases} x-1 > 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x-1 < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

(i)  $x > 1$ 일 때,  $f(x) \leq 0$ 이므로  $1 < x \leq 4$

(ii)  $x < 1$ 일 때,  $f(x) \geq 0$ 이므로  $-1 \leq x < 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $-1 \leq x < 1$  또는  $1 < x \leq 4$



### 4. 연립부등식

연립부등식  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 의 해는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식  $f(x) > 0$ 과  $g(x) > 0$ 을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위이므로 각각의 부등식을 풀어 공통 부분을 구한다.

즉,  $A = \{x | f(x) > 0\}$ ,  $B = \{x | g(x) > 0\}$ 라 하면 연립부등식  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 의 해집합은  $A \cap B$ 이다.

이때 공통 부분은 수직선을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

예 연립부등식  $1 < \frac{3x}{x+1} \leq 2$ 의 해를 구해 보자.

주어진 부등식의 해는 두 개의 부등식

$$1 < \frac{3x}{x+1} \quad \dots\dots \text{㉠}, \quad \frac{3x}{x+1} \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위이다.

(i) 부등식 ㉠을 이항하여 정리하면  $\frac{3x-(x+1)}{x+1} > 0$ ,  $\frac{2x-1}{x+1} > 0$

양변에  $(x+1)^2$ 을 곱하면  $(x+1)(2x-1) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉢}$

(ii) 부등식 ㉡을 이항하여 정리하면  $\frac{3x-2(x+1)}{x+1} \leq 0$ ,  $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$

양변에  $(x+1)^2$ 을 곱하면  $(x+1)(x-2) \leq 0$ ,  $x \neq -1 \quad \therefore -1 < x \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉣}$

따라서 구하는 해는 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위이므로

$$\frac{1}{2} < x \leq 2$$



## 예제 3

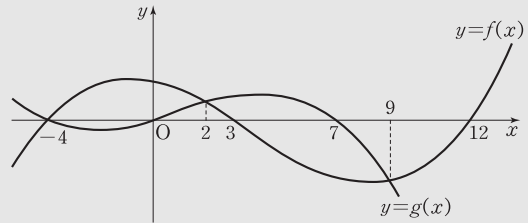
## 함수의 그래프와 분수부등식의 해

두 삼차함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,  
부등식

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$$

을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 값의 합을 구하시오.

(단,  $f(-4)=f(3)=f(12)=0$ ,  $g(-4)=g(0)=g(7)=0$ ,  
 $f(2)=g(2)$ ,  $f(9)=g(9)$ )



- 풀이 전략** (1) 주어진 부등식을 만족시키는  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 관계식을 찾는다.  
(2) 주어진 함수의 그래프로부터 (1)에서 구한 관계식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위를 찾는다.

**풀이**  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ 에서 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \geq 0$$

양변에  $[g(x)]^2$ 을 곱하면

$$g(x)[f(x)-g(x)] \geq 0, g(x) \neq 0$$

$$\therefore \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

(i)  $g(x) > 0$ ,  $f(x) \geq g(x)$ 일 때

$$g(x) > 0 \text{에서 } x < -4 \text{ 또는 } 0 < x < 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(x) \geq g(x) \text{에서 } -4 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}$ ,  $\textcircled{㉒}$ 을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $0 < x \leq 2$

(ii)  $g(x) < 0$ ,  $f(x) \leq g(x)$ 일 때

$$g(x) < 0 \text{에서 } -4 < x < 0 \text{ 또는 } x > 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

$$f(x) \leq g(x) \text{에서 } x \leq -4 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$\textcircled{㉓}$ ,  $\textcircled{㉔}$ 을 동시에 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $7 < x \leq 9$

(i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는

$$0 < x \leq 2 \text{ 또는 } 7 < x \leq 9$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수  $x$ 는 1, 2, 8, 9이므로 모든 정수  $x$ 의 값의 합은

$$1+2+8+9=20$$

**답** 20

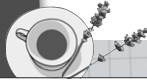
정답과 풀이 12쪽

[3-235-019]

유제 4 연립부등식

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1 > 0 \\ \frac{x-6}{x^2-6x+8} \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 값의 합을 구하시오.



[3-235-020]

1

부등식  $(x-2)(x-5)(x-8) < 0$ 을 만족시키는 모든 양의 정수  $x$ 의 값의 합을 구하시오.

[3-235-021]

2

부등식  $x^4 + 5x^2 \leq 6x^3$ 을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

[3-235-022]

3

분수부등식  $\frac{2}{x-3} \leq \frac{1}{x+1}$ 을 만족시키는 양의 정수  $x$ 의 최댓값을  $\alpha$ , 음의 정수  $x$ 의 최댓값을  $\beta$ 라 할 때,  $\alpha - \beta$ 의 값을 구하시오.

[3-235-023]

4

분수부등식  $\frac{x^2 - 2x - 8}{|x^2 - 2x|} \leq 0$ 을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 값의 합은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9



[3-235-024]

**1** 연립부등식

$$\begin{cases} x^3 - 9x > 0 \\ x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[3-235-025]

**2** 분수부등식  $\frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 2x + 1} \leq x$ 를 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

[3-235-026]

**3** 일정한 속력으로 이동할 수 있는 두 로봇 A, B를 개발하여 각각 100 m를 이동시키는 실험을 한다. 두 로봇 A, B의 속력을 각각  $p$  m/분,  $q$  m/분이라 할 때,  $q = p + 20$ 인 관계가 성립하도록 설정한다. 이때 두 로봇 A, B가 각각 100 m를 이동한 시간의 합이 2분 55초 이하가 되도록 하는  $p$ 의 최솟값을 구하시오.

[3-235-027]

**4** 두 집합

$$A = \left\{ x \mid \frac{(x-a)^2}{x^2 + x - 12} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \mid \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2} \leq 0 \right\}$$

에 대하여 집합  $A \cap B$ 의 원소 중 정수의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수  $a$ 의 값의 합을 구하시오.





[3-235-028]

1

자연수  $n$ 에 대하여 부등식  $(x-n)(x^2-6x+3n) < 0$ 을 만족시키는 양의 정수  $x$ 의 개수를  $f(n)$ 이라 할 때,  
 $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값을 구하시오.

[3-235-029]

2

서로 다른 두 자연수  $a, b (a < b)$ 에 대하여  $x$ 에 대한 분수부등식

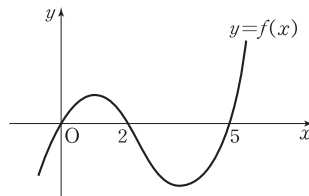
$$\frac{2}{x-a} - \frac{1}{x-b} \leq 0$$

을 만족시키는 양의 정수  $x$ 의 개수가 20이 되도록 하는 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하시오.

[3-235-030]

3

삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 분수부등식  $\frac{[f(x)]^2}{f(x+2)f(x-4)} \leq 0$ 을 만족시키는 모든 정수  $x$   
 의 값의 합은? (단,  $f(0)=f(2)=f(5)=0$ )



① 15

② 18

③ 21

④ 24

⑤ 27



## 대표 기출 문제

출제  
경향

고차부등식이나 분수부등식의 해를 구하는 문제, 미정계수를 포함한 고차부등식이나 분수부등식에서 미정계수를 구하거나 해를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

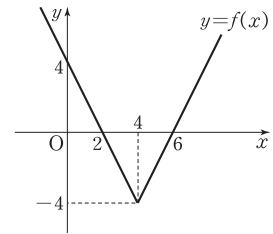
또한 함수의 그래프가 주어지고 부등식의 해 또는 정수인 근의 개수를 구하는 문제가 출제되고 있으며 실생활과 관련된 부등식의 활용 문제도 출제될 수 있다.

함수  $f(x) = 2|x - 4| - 4$ 에 대하여 부등식

$$\frac{x-3}{f(x)} \geq 1$$

을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합은? [4점]

- ① 18                      ② 21                      ③ 24  
④ 27                      ⑤ 30



2015학년도 대수능 6월 모의평가

**출제 의도** | 분수부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $\frac{x-3}{f(x)} \geq 1$ 에서  $\frac{x-3}{f(x)} - 1 \geq 0$ 이므로

$$\frac{x-3-f(x)}{f(x)} \geq 0$$

양변에  $\{f(x)\}^2$ 을 곱하면

$$\{x-3-f(x)\}f(x) \geq 0, f(x) \neq 0$$

$$\{f(x)-(x-3)\}f(x) \leq 0, f(x) \neq 0$$

또한

$$f(x) = \begin{cases} 2x-12 & (x \geq 4) \\ -2x+4 & (x < 4) \end{cases}$$

이므로

(i)  $x \geq 4$ 일 때

$$\{2x-12-(x-3)\}(2x-12) \leq 0, x \neq 6$$

$$(x-9)(x-6) \leq 0, x \neq 6$$

$$\therefore 6 < x \leq 9$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수  $x$ 는 7, 8, 9이다.

(ii)  $x < 4$ 일 때

$$\{-2x+4-(x-3)\}(-2x+4) \leq 0, x \neq 2$$

$$(3x-7)(x-2) \leq 0, x \neq 2$$

$$\therefore 2 < x \leq \frac{7}{3}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수  $x$ 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합은

$$7+8+9=24$$

답 ③