

◆무한수열의 수렴

무한수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 한없이 커질 때, 일반항 a_n 이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다고 하며, 이 일정한 값 α 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값이라 한다. 그리고, 이것을 기호로는

$$\bullet n \rightarrow \infty \text{일 때 } a_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

($n \rightarrow \infty$ 일 때 a_n 의 극한값은 α 이다.)

* 기호 ∞ 는 무한대라고 읽고, 이는 한없이 커져가는 상태를 나타내는 기호이며 수는 아니다.

1. 다음 무한수열의 극한값을 구하여보자.

$$(1) 1 + 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

$$(2) \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

[정답] (1) 1, (2) 0

2. 일반항이 다음 식으로 주어진 수열의 극한값을 구하여라.

$$(1) \frac{2}{n+1}$$

$$(2) \frac{1}{n^2}$$

$$(3) 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

[정답] (1) 0 ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$) (2) 0

$$(3) 1 \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \right)$$

◆무한수열의 발산

① n 이 한없이 커질 때 무한수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다고 하며 극한값은 없다고 한다.

$$\bullet \text{발산} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{의 값이 일정하지 않다. (진동)} \end{cases}$$

② 수열의 수렴, 발산의 판정

• 일반항 $\{a_n\}$ 을 구한다.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 이면 수렴, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \alpha$ 이면 발산
(단, α 는 일정한 값)

3. 다음 수열의 극한을 조사해보자.

- (1) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots$
 (2) $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$
 (3) $1, -2, 4, \dots, (-2)^{n-1}, \dots$
 (4) $1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$

[정답] (1) ∞ 로 발산, (2) $-\infty$ 로 발산 (3)진동, (4)진동

4. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

- (1) $2, 7, 12, 17, \dots, 5n-3, \dots$
 (2) $1, -1, -3, 5, \dots, 3-2n, \dots$
 (3) $0, 2, 0, 2, \dots, 1+(-1)^n, \dots$
 (4) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1+\frac{(-1)^n}{n}, \dots$

[정답]

- (1) ∞ 로 발산 (2) $-\infty$ 로 발산
 (3) 발산(진동) (4) 1에 수렴

◆수열의 극한의 기본 성질(1)

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 이면

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k\alpha$ (단, k 는 상수)
 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha + \beta$
 ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha - \beta$
 ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha\beta$
 ⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0, \beta \neq 0$)

*수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 발산해도 수열

$\{a_n + b_n\}$ 과 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (단, $b_n \neq 0$)은 수렴할 수 있다.

5. 다음 수열의 극한값을 구하시오.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n}$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1}$

[풀이 및 정답]

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

◆수열의 극한의 기본 성질(2)

①수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 α, β 에 수렴할 때,

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \text{ 즉 } \alpha \leq \beta$$

$$\star \text{주의 : } a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

②수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 에 대하여

$$\left. \begin{array}{l} a_n \leq b_n \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ 이고} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \text{ (일정)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

◆극한값의 계산 방법

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

① $\frac{\text{정식}}{\text{정식}}$: 분모의 최고차항(계수는 제외)으로 분모 분자를 나눈다.

- (분자차수) = (분모차수) $\rightarrow$ 극한값은 최고차항의 계수이다.
- (분자차수) < (분모차수) $\rightarrow$ 극한값은 0이다.
- (분자차수) > (분모차수) $\rightarrow \infty$ 또는 $-\infty$ 이므로 극한값은 없다.

② 근호가 포함된 식 : 근호밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.

③ 지수식 : 밑이 큰항으로 분모·분자를 나눈다.

(2) $\infty - \infty$ 꼴의 극한값

① 정식 : 최고차항으로 묶는다.

② $\sqrt{\quad}$ 가 있을 때 : 분자를 유리화 한다.

③ 지수식 : 밑이 큰항으로 묶는다.

(3) ∞ 의 성질

$$\textcircled{1} \infty \pm (\text{상수}) = \infty, \quad \textcircled{2} \begin{cases} a \times \infty = \infty (a > 0) \\ a \times \infty = -\infty (a < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[n]{\infty} = \infty \quad \textcircled{4} \frac{(\text{상수})}{\infty} = 0$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} \frac{\infty}{a} = \infty (a > 0) \\ \frac{\infty}{a} = -\infty (a < 0) \end{cases} \quad (a \text{는 상수})$$

◆무한등비수열의 정의

첫째항이 r , 공비가 r 인 무한수열

$$r, r^2, \dots, r^n, \dots$$

과 같이 항이 한없이 계속되는 등비수열을 무한등비수열이라 한다.

◆무한등비수열

① 무한등비수열 $\{r^n\}$ 의 수렴, 발산

- $r > 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ (발산)
- $r = 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ (수렴)
- $|r| < 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ (수렴)
- $r \leq -1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ 은 진동(발산)

② r^n 을 포함한 식의 극한값을 구하는 방법
다음 네 경우에 대하여 조사한다.

- $|r| < 1$ 일 때 • $r = 1$ 일 때
- $r = -1$ 일 때 • $|r| > 1$ 일 때

* 무한등비수열 $\{r^n\}$ 의 수렴 조건 $\Rightarrow -1 < r \leq 1$ * 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 의 수렴 조건
 $\Rightarrow a = 0$ 또는 $-1 < r \leq 1$ 6. $0 < |a| < |b|$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n - b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = 3a$ 일 때, $\frac{a-b}{a+b}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[정답] ①

[풀이]

분모 분자를 b^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n - b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^n - b}{a\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = -b$$

따라서, $-b = 3a$, 즉 $b = -3a$ 이므로

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a+3a}{a-3a} = \frac{4a}{-2a} = -2$$

7. 수열 $\{(x^2 - 2x)^n\}$ 이 수렴하는 x 의 값의 범위는?

- ① $-1 < x \leq 1$ ② $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
③ $1 - \sqrt{2} < x \leq 1 + \sqrt{2}$ ④ $2 - \sqrt{2} \leq x < 2 + \sqrt{2}$
⑤ $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}, x \neq 1$

[정답] ⑤

[풀이]

수렴할 조건은 $-1 < x^2 - 2x \leq 1$ 이므로

$$(i) \ x^2 - 2x + 1 > 0 \text{에서 } (x-1)^2 > 0 \quad \therefore x \neq 1$$

$$(ii) \ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \text{에서 } 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \therefore 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}, x \neq 1$$

8. 두 병 A, B에 물이 각각 4L, 2L 담겨 있다. A병에

들어 있는 물의 양의 $\frac{2}{3}$ 를 B병에 넣고, 다시 B병에있는 양의 $\frac{2}{3}$ 를 A병에 넣는 시행을 한없이 반복하면 A병에 남아 있는 물의 양은 한없이 xL 에 가까워진다. 이 때, x 의 값을 구하면 $\frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인자연수)이다. $p + q$ 의 값을 구하시오.

[정답] 11

[풀이]

 n 회 시행후 A병에 담긴 물의 양을 a_n , B병에 담긴물의 양을 b_n 이라 하면 $a_n + b_n = 6 \dots\dots \textcircled{1}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}\left(b_n + \frac{2}{3}a_n\right) = \frac{7}{9}a_n + \frac{2}{3}b_n \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a_{n+1} = \frac{7}{9}a_n + \frac{2}{3}(6 - a_n) = \frac{1}{9}a_n + 4$$

$$a_{n+1} - \frac{9}{2} = \frac{1}{9}\left(a_n - \frac{9}{2}\right) \quad \therefore a_n - \frac{9}{2} = \left(a_1 - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{9}{2} \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{9}{2}L$$

$$x = \frac{9}{2} = \frac{q}{p} \quad \therefore p = 2, q = 9 \quad \therefore p + q = 11$$

9. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 6}{a_n - 1} = 2$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① -8 ② -4 ③ 3
④ 6 ⑤ 8

[정답] ⑤

[풀이]

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ 로 놓으면

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 6}{a_n - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)} = \frac{x + 6}{x - 1} = 2$$

$$2x - 2 = x + 6 \quad \therefore x = 8$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-3)^n a_n}{2^n - (-3)^n} = \frac{2}{3}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

[정답] $-\frac{2}{3}$

[풀이]

$$b_n = \frac{2^n + (-3)^n a_n}{2^n - (-3)^n} \text{으로 놓으면}$$

$$a_n = \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right\} b_n - \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{따라서, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{2}{3}$$

11. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{4n^2 + 3n + 1}$ 의 소수 부분을 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

[정답] $\frac{3}{4}$

[풀이]

$$(2n)^2 < 4n^2 + 3n + 1 < (2n+1)^2 \text{ 이므로}$$

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n + 1 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{3}{4}$$

12. 1이 아닌 자연수 n 에 대하여 x^n 을 $(x-2)(x-3)$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(1)}{R(0)}$ 의 값을 구하여라.

[정답] $\frac{1}{2}$

[풀이]

$$x^n = (x-2)(x-3)p(x) + ax + b \text{ 라면}$$

$$\text{i) } x = 2 : 2a + b = 2^n \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{ii) } x = 3 : 3a + b = 3^n \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{①, ②에 의해 } a = 3^n - 2^n, b = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore R(x) = (3^n - 2^n)x + 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

$$R(1) = 2^{n+1} - 3^n, \quad R(0) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(1)}{R(0)} = \frac{1}{2}$$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$

(단, $n = 1, 2, 3, \dots$)를 만족시킬 때
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 오른쪽 그림을
 이용하여 구하면?

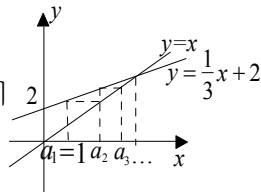
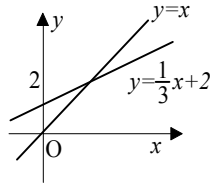
- ① 0 ② 1 ③ 2
 ④ 3 ⑤ ∞ 로 발산

[정답] ④

[풀이]

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커
 지면 a_n 은 두 직선 $y=x$ 와

$y = \frac{1}{3}x + 2$ 의 교점 $x=3$ 에 한없이
 가까워짐을 알 수 있다.



14. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여

$$x_1 = 2, x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$$

이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ 의 값을 구하시오.

[정답] 1

[풀이]

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1} \text{에서 } \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 1, \quad \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 1 (\text{일정})$$

따라서, 수열 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{x_1}$ 이고 공차가 1인

등차수열이다.

$$\therefore \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + (n-1) \cdot 1 = \frac{1}{2} + (n-1)$$

$$\therefore x_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + (n-1)} = \frac{1}{\frac{2n-1}{2}} = \frac{2}{2n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$ 의 값을
 구하시오.

[정답] ④

[풀이]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{1} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = 3 + 3 = 6$$

16. 자연수 n 에 대하여 10^n 의 양의 약수의 총합을

a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{10^n}$ 의 값을 구하시오.

[정답] $\frac{5}{2}$

[풀이]

$$10^n = 2^n \cdot 5^n \text{ 이므로}$$

$$a_n = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n)$$

$$= \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right) \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} (2^{n+1} - 1)(5^{n+1} - 1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \left(5 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

17. 50%의 소금물 100g에서 50g의 소금물을 덜어내고 물 30g과 소금 20g을 다시 넣었을 때의 소금물의 농도를 $a_1\%$ 라 하자. 이러한 시행을 반복하여 n 회 시행했을 때의 소금물의 농도를 $a_n\%$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

[정답] 40

[풀이]

$$\frac{a_{n+1}}{100} \times 100 = \frac{a_n}{100} \times 100 - \frac{a_n}{100} \times 50 + 20$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 20$$

$$\therefore a_{n+1} - 40 = \frac{1}{2}(a_n - 40) \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore a_n - 40 = (a_1 - 40) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(a_1 = \frac{\frac{50}{100} \times 50 + 20}{100} \times 100 = 45 \right)$$

$$\therefore a_n - 40 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 40$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 40$$

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n}{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}$ 의 값은?

- ① $1 - \sqrt{2}$ ② $1 + \sqrt{2}$ ③ 1
④ -1 ⑤ 0

[정답] ①

[풀이]

분자, 분모를 각각 $(1 + \sqrt{2})^n$ 으로 나누면

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n + (1 - \sqrt{2})}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n}$$

그런데 $|1 + \sqrt{2}| > |1 - \sqrt{2}|$ 에서 $\left| \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right| < 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n = 0 \quad \therefore (\text{주어진 식}) = 1 - \sqrt{2}$$

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos n\theta$ 의 값을 구하여라. (단, θ 는 상수)

[정답] 0

[풀이]

$$-1 \leq \cos n\theta \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n\theta}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pm \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n} = 0$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\frac{a_n + 2a_{n+1}}{a_n + 3} = \left(\frac{2000}{1999}\right)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)을 만족할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

[정답] -3

[풀이]

주어진 식에서 $\frac{a_n + 3}{a_n + 2a_{n+1}} = \left(\frac{1999}{2000}\right)^n$ 이므로

양변에 극한을 취하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = k$ 로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3}{a_n + 2a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1999}{2000}\right)^n$$

$$\therefore \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = 0$$

$$\therefore \frac{k + 3}{k + 2k} = 0 \text{ 에서 } k = -3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n}$ 으로 정의 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

[정답] 4

[풀이]

양변에 $\log$ 를 취하면

$$\log a_{n+1} = \log \sqrt{4a_n}$$

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{2}(\log a_n + 2 \log 2)$$

$$\log a_{n+1} - 2 \log 2 = \frac{1}{2}(\log a_n - 2 \log 2)$$

$$\therefore \log a_n - 2 \log 2 = \left(\log a_1 - 2 \log 2\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$a_1 = 2$ 이므로

$$\log a_n = 2 \log 2 - \left(\log 2\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

양변의 $n \rightarrow \infty$ 일 때의 극한값을 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = 2 \log 2 = \log 4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

22. 무한수열 $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \dots$ 의 극한값을 구하시오.

[정답] 3

[풀이]

수열 $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \dots$ 의 각항은

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}} \dots \text{이다.}$$

따라서 수열의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 3^{1 - \frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{1 - \frac{1}{2^n}} = 3$$

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\}$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[정답] ④

[풀이]

괄호안을 각각 통분하여 곱의 꼴로 고치면

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2^2 - 1}{2^2} \right) \left(\frac{3^2 - 1}{3^2} \right) \left(\frac{4^2 - 1}{4^2} \right) \cdots \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \right) \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \right) \cdots \left(\frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

24. 다음의 극한 값을 구하면?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$
 ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

[정답] ②

[풀이]

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2}{n^4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$