

1. $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3(a_{15})$ 의 값을 구하시오.

[정답] 14

[풀이]

$a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고

$$a_1 = 1, r = \frac{a_2}{a_1} = 3 \text{이다.}$$

$$\therefore a_{15} = 1 \cdot 3^{15-1} = 3^{14} \quad \therefore \log_3 a_{15} = \log_3 3^{14} = 14$$

1. $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값을 구하시오.

[정답] 900

[풀이]

$a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n$ 이고, 수열 $\{3n^2 + n\}$ 은 $\{a_n\}$ 의 계차

$$\begin{aligned} \text{수열 이므로 } a_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k) \\ &= 3 \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2(n-1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{10} = 10^2(10-1) = 900$$

2. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 4n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 주어지는 수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

[정답]

풀이

수열 $\{ \}$ 의 계차수열을 $\{ \}$ 이라

()

()

3. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)일

때, $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{a_k}$ 의 값을 구하시오.

[정답] $\frac{60}{31}$

[풀이]

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{a_k} &= 2 \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{60}{31} \end{aligned}$$

4. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제 20항을 구하여라.

[정답] $\frac{1}{20}$

[풀이]

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n \text{에 } n=1 \text{에서 } n-1 \text{까지 대입하면}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1, a_3 = \frac{2}{3}a_2, a_4 = \frac{3}{4}a_3, \dots, a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-1}$$

위의 식을 변변 곱하면

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}a_1 = \frac{1}{n} \quad \therefore a_{20} = \frac{1}{20}$$

5. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 10번째 항을 구하면?

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

- ① $2^{10} + 3$ ② $2^{10} + 2$ ③ $2^{10} + 1$
 ④ $2^{10} - 1$ ⑤ $2^{10} - 2$

[정답] ④

[풀이]

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases} \text{에서}$$

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항 $a_1 + 1 = 2$ 이고
 공비가 2인 등비수열 이므로

$$\therefore a_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

$$\therefore a_{10} = 2^{10} - 1$$

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 4a_n + 3$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\log_2(a_k + 1) \cdot \log_2(a_{k+1} + 1)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{101}{100}$ ③ $\frac{99}{400}$ ④ $\frac{401}{400}$ ⑤ $\frac{200}{400}$

[정답] ③

[풀이]

$a_{n+1} = 4a_n + 3$ 의 양변에 1을 더하여 변형하면

$$a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 4$, 공비가 4인 등비수열
 이므로 $a_n + 1 = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n \quad \therefore a_n = 4^n - 1$

$$\text{이 때, } \log_2(a_k + 1) = \log_2(4^k - 1 + 1) = \log_2 2^{2k} = 2k$$

$$\log_2(a_{k+1} + 1) = \log_2(4^{k+1} - 1 + 1) = \log_2 2^{2(k+1)} = 2(k+1) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \text{로 } & \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\log_2(a_k + 1) \log_2(a_{k+1} + 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{2k \cdot 2(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{99}{400} \end{aligned}$$

7. $a_1 = 1$, $na_{n+1} = (n+1)a_n + 3$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)으로
주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 100항을 구하시오.

[정답] 397

[풀이]

$na_{n+1} = (n+1)a_n + 3$ 의 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{3}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_n}{n} = b_n \text{ 이라 하면 } b_{n+1} = b_n + \frac{3}{n(n+1)}, b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{k(k+1)} \\ &= 1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + 3 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 1 + 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 4 - \frac{3}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = nb_n = n \left(4 - \frac{3}{n} \right) = 4n - 3$$

$$\therefore a_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n \quad (n \text{ 은 자연수})$$

일 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{1998}$ 을 12로 나눈 나머지를 구하시오.

[정답] 9

[풀이]

주어진 조건에서

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 = 1 \times 2$$

$$a_3 = 3a_2 = 1 \times 2 \times 3$$

.....

$$a_n = na_{n-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

그런데 $a_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ 는 12의 배수이므로

$a_5, a_6, \dots, a_{1998}$ 도 12의 배수이다. 따라서,

$a_1 + a_2 + \dots + a_{1998}$ 을 12로 나눈 나머지는

$$1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 6 = 9$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1, a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n$ ($n \geq 1$) 일 때,
 a_n 을 구하여라.

[정답] n

[풀이]

$$\text{오른편과 같이 } a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$$

의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 대입

하여 변변 곱하면 $a_n = na_1$

그런데 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = n$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{1} a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{2} a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \times) a_n &= \frac{n}{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= na_1 \end{aligned}$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족할 때, a_{20} 을 구하여라.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1-3a_n} \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

[정답] $-\frac{1}{56}$

[풀이]

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1-3a_n} \text{의 양변의 역수를 취하면}$$

$$\frac{1}{a_1} = 1, \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - 3$$

따라서, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 -3인 등차 수열이다.

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 4$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{-3n + 4}$$

$$\therefore a_{20} = \frac{1}{-3 \cdot 20 + 4} = -\frac{1}{56}$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $a_1 = 1, 2S_n = na_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이 성립한다. 이 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

[정답] 10

[풀이]

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{이므로}$$

$$2S_n = n(S_{n+1} - S_n)$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{n+2}{n} S_n \quad \dots \text{㉠}$$

㉠을 이용하여 식을 전개하면

$$S_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdots \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} S_1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad (\because S_1 = a_1 = 1)$$

$$\therefore a_{10} = S_{10} - S_9 = 10$$