1학년 5주차 수학 가정학습 과제 풀이

1.

(1)$2A-(B-3C)$

$=2A-B+3C$

$=2(-x^3+2x^2+4)-(-x^3+2x-1)+3(3x^3-2x^2+x)$

$=-2x^3+4x^2+8+x^3-2x+1+9x^3-6x^2+3x$

$=8x^3-2x^2+x+9$

(2) $2(A+B)-3(C-2A)$

$=2A+2B-3C+6A=8A+2B-3C$

$=8(-x^3+2x^2+4)+2(-x^3+2x-1)-3(3x^3-2x^2+x)$

$=-8x^3+16x^2+32-2x^3+4x-2-9x^3+6x^2-3x$

$=-19x^3+22x^2+x+30$

2.(1) ①(2) ②

(1) $2A-B=2(2x^2-x+1)-(x^2-2x-1)$

$=4x^2-2x+2-x^2+2x+1$

$=3x^2+3$

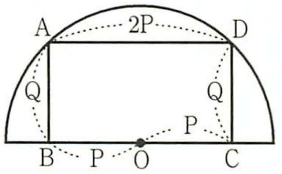
(2) $(3A+B)-(A+2B)=3A+B-A-2B=2A-B$

$=2(x^2+xy+y^2)-(-x^2+2xy)$

$=3x^2+2y^2$

3. ⑤

$\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$라고 하면



$\overline{DA}=2P$, $\overline{AB}=Q$, $\overline{BO}=P$이고

$\overline{OC}+\overline{CD}=x+y+3$에서

$P+Q=x+y+3$ ……㉠

$\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BO}=3x+y+5$에서

$3P+Q=3x+y+5$ ……㉡

㉡−㉠에서 $2P=2x+2$

$P=x+1$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $Q=y+2$

직사각형 ABCD의 넓이 S를 구하면

$S=\overline{DA}\times\overline{AB}=2P\times Q=2(x+1)(y+2)$

4. 1) 10 (2) 12 (3) 36

다항식 $(3x^2+2x+1)^2=(3x^2+2x+1)(3x^2+2x+1)$이므로

(1) x^2의 계수는

(상수항)×(이차항)+(일차항)×(일차항)+(상수항)×(이차항)

$1\cdot 3x^2+2x\cdot 2x+3x^2\cdot 1=(3+4+3)x^2=10x^2$

따라서 x^2의 계수는 10이다.

(2) x^3의 계수는 (이차항)×(일차항)+(일차항)×(이차항)

$3x^2\cdot 2x+2x\cdot 3x^2=(6+6)x^3=12x^3$

따라서 x^3의 계수는 12이다.

(3) 모든 계수의 합은 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$(3+2+1)^2=36$

5. (1) 10 (2) 3 (3) 42

다항식 $(x^2+2x+3)(x^2+x+5)$이므로

(1) x^2의 계수는

(상수항)×(이차항)+(일차항)×(일차항)+(상수항)×(이차항)

$3\cdot x^2+2x\cdot x+x^2\cdot 5=(3+2+5)x^2=10x^2$

따라서 x^2의 계수는 10이다.

(2) x^3의 계수는 (이차항)×(일차항)+(일차항)×(이차항)

$x^2\cdot x+2x\cdot x^2=(1+2)x^3=3x^3$

따라서 x^3의 계수는 3이다.

(3) $(x^2+2x+3)(x^2+x+5)$의 모든 계수의 합은 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$(1+2+3)(1+1+5)=6\cdot 7=42$

6. (1) ① (2) ④

(1) $(x+a)(x^2-3x+2)=x^3-3x^2+2x+ax^2-3ax+2a$

$=x^3+(a-3)x^2+(2-3a)x+2a$ …㉠

상수항이 $2a$이므로 $2a=-4$ $\therefore a=-2$

㉠에서 x^2의 계수가 $a-3$이므로 x^2의 계수는 $-2-3=-5$

[다른풀이]

$(x+a)(x^2-3x+2)$에서 상수항이 나오는 경우는

a와 2를 곱하는 경우이므로 $2a=-4$ $\therefore a=-2$

x^2의 항은 (일차항)×(일차항)+(상수항)×(이차항)이므로

$(-3x^2)+ax^2=(-3+a)x^2=-5x^2$

따라서 x^2의 계수는 -5

1학년 5주차 수학 가정학습 과제 풀이

(2) $\mathrm{A}=x^2+8x+k$, $\mathrm{B}=x^2-2x+5$ 라 놓으면
$(x^2+8x+k)(x^2-2x+5)=\mathrm{AB}$ 의 전개식에서 이차항은
(A의 이차항)×(B의 상수항)+(A의 일차항)×(B의 일차항)
+(A의 상수항)×(B의 이차항)
$=x^2\cdot 5+8x\cdot(-2)x+k\cdot x^2=(-11+k)x^2$
이때 x^2의 계수가 -6이므로 $-11+k=-6$
$\therefore k=5$
$(x^2+8x+5)(x^2-2x+5)$ 의 전개식에서
$8x\cdot 5+5\cdot(-2x)=40x-10x=30x$
따라서 x의 계수는 30

7. 0

$(1+x+x^2+x^3)^2-(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{100})^2$ 에서
x^3의 계수는 $(1+x+x^2+x^3)^2$의 x^3의 계수에서 $(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{100})^2$의 x^3의 계수를 빼면 된다.
이때 $(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{100})^2$에 포함되어 있는 x^4, x^5, $\cdots$, x^{100}은 x^3의 계수에 영향을 끼치지 않는다.
즉, x^4, x^5, $\cdots$, x^{100}에 어떤 항을 곱해도 x^3이 될 수 없기 때문이다. 따라서 x^3의 계수를 구할 때, x^4, x^5, $\cdots$, x^{100}의 항이 없는 것처럼 생각해도 무방하다.
$(1+x+x^2+x^3)^2$, $(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{100})^2$의 x^3의 계수가 같으므로 주어진 식의 x^3의 계수는 0이다.

8. 12

(i) $2x^3=bx^3$에서 $b=2$이고
$(ax+1)x^2=bx^3+x^2$에서 $ax^3+x^2=bx^3+x^2$
$\therefore\ a=b$
$\therefore\ a=b=2$
(ii) $4x=dx$에서 $d=4$이고
$(ax+1)c=dx+e$에서 $acx+c=dx+e$
$ac=d$, $c=e$
(iii) $-4-e=-6$에서 $e=2$
$\therefore\ c=e=2$
(i), (ii), (iii)에서 $a+b+c+d+e=2+2+2+4+2=12$

9. (1) $\frac{1}{2}(3^{16}-1)$ (2) 10^8-1

(1) 주어진 식에 $(3-1)$을 곱하면
$(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$
$=(3^8-1)(3^8+1)=3^{16}-1$
$\therefore (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=\frac{1}{2}(3^{16}-1)$

(2) $9\times 11\times(10^2+1)(10^4+1)$
$=(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)$
$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$
$=(10^4-1)(10^4+1)=10^8-1$

10. (1) $2^{16}-1$ (2) 49

(1) $\mathrm{P}=(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)$라 하면
$(1-2)\mathrm{P}=(1-2)(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)$
$=(1-2^2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)$
$=(1-2^4)(1+2^4)(1+2^8)$
$=(1-2^8)(1+2^8)$
$=\{1-(2^8)^2\}=1-2^{16}$
따라서 $-\mathrm{P}=1-2^{16}$이므로 $\mathrm{P}=2^{16}-1$

(2) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)$
$=x^8-1=50-1=49$

11. (1) $a^2-b^2-c^2+2bc$ (2) x^6-64

(1) $(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

(2) $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
$=\{(x+2)(x^2-2x+2^2)\}\{(x-2)(x^2+2x+2^2)\}$
$=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$
$=(x^3)^2-(2^3)^2$
$=x^6-64$

12. (1) x^4-5x^2+4 (2) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

(1) $x^2-2=\mathrm{X}$로 놓으면
$(x^2+x-2)(x^2-x-2)=(\mathrm{X}+x)(\mathrm{X}-x)$
$=\mathrm{X}^2-x^2$
$=(x^2-2)^2-x^2$
$=x^4-4x^2+4-x^2$
$=x^4-5x^2+4$

1학년 5주차 수학 가정학습 과제 풀이

(2) $(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}$

$=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-6\}$

$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=x^4+2x^3+x^2-8x^2-8x+12$

$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

13. (1) 5 (2) −14 (3) 34

(1) $a^2+ab+b^2=(a^2+b^2)+ab=\{(a+b)^2-2ab\}+ab$

$=(a+b)^2-ab=2^2-(-1)=5$

(2) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^3+b^3}{ab}=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$

$=\dfrac{2^3-3\cdot(-1)\cdot 2}{-1}=-14$

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\cdot(-1)=4+2=6$ 이므로

$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=6^2-2\cdot(-1)^2=34$

14. (1) ② (2) ② (3) ③

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 에서

$10=1^3-3ab, 3ab=-9$ $\therefore\ ab=-3$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1^2-2\cdot(-3)=7$

(2) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$8=2^2-2ab$ $\therefore\ ab=-2$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3\cdot(-2)\cdot 2=20$

(3) $a=2+\sqrt{2}, b=2-\sqrt{3}$ 에서

$a+b=4, ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

이때 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot 1\cdot 4=52$

$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^3+b^3-ab(a+b)=52-1\cdot 4=48$

15. (1) 29 (2) $a=-4, b=1$

(1)

[방법1] 수치대입법

$x^2-3x+6=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$

에서 $x=1$을 대입하면 $1^2-3\cdot 1+6=2b$에서 $b=2$

$x=2$을 대입하면 $2^2-3\cdot 2+6=-c$에서 $c=-4$

$x=3$을 대입하면 $3^2-3\cdot 3+6=2a$에서 $a=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=9+4+16=29$

[방법2] 계수비교법

주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-3x+6=(a+b+c)x^2-(3a+5b+4c)x+2a+6b+3c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b+c=1,\ 3a+5b+4c=3,\ 2a+6b+3c=6$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=2,\ c=-4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=9+4+16=29$

(2) $(x-2)(x+1)f(x)=x^3+ax^2+bx+6$의 양변에

$x=2$를 대입하면 $8+4a+2b+6=0$

$\therefore\ 2a+b=-7$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면 $-1+a-b+6=0$

$\therefore\ a-b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-4,\ b=1$

16. (1) $\frac{7}{5}$ (2) 8

(1) 주어진 등식을 k에 대한 내림차순으로 정리하면

$(2x-y-1)k+x+2y-2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x-y-1=0,\ x+2y-2=0$ 두 식을 연립하면

$x=\dfrac{4}{5},\ y=\dfrac{3}{5}$

$\therefore x+y=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$

(2) 좌변을 전개하여 $x,\ y$에 대하여 정리하면

$(a+b)x+(a-b)y+4=3x-y+c$

이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면 $a+b=3,\ a-b=-1,\ 4=c$

연립하면 $a=1,\ b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=1\cdot 2\cdot 4=8$

17. (1) 7 (2) −2

(1) $(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-3y+5)k+(3x-4y)=0$이고,

이 식은 k에 대한 항등식이므로

$\begin{cases} x-3y+5=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$3\times$㉠$-$㉡에서

$3(x-3y+5)-(3x-4y)=0$

$-5y+15=0$ $\therefore\ y=3$

y의 값을 ㉡에 대입하면 $3x-12=0\ \therefore\ x=4$

따라서 $x=4,\ y=3$이므로 $x+y=7$

1학년 5주차 수학 가정학습 과제 풀이

[다른풀이]
$(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$을 k에 대한 항등식이므로
(ⅰ) $k=0$을 대입하면 $3x-4y=0$ …… ㉠
(ⅱ) $k=-1$을 대입하면 $2x-y-5=0$
…… ㉡
㉠$-4\times$㉡에서
$(3x-4y)-4(2x-y-5)=0$, $-5x+20=0$ $\therefore\ x=4$
x의 값을 ㉠에 대입하면 $12-4y=0$ $\therefore\ y=3$
따라서 $x=4$, $y=3$이므로 $x+y=7$

(2) $a(2x+y)+b(x-2y)-5(x-1)+c=0$
좌변을 전개하여 x, y에 대하여 정리하면
$(2a+b-5)x+(a-2b)y+5+c=0$
이 식은 x,y에 대한 항등식이므로
$2a+b-5=0$, $a-2b=0$, $5+c=0$
세 식을 연립하면 $a=2$, $b=1$, $c=-5$
$\therefore\ a+b+c=2+1-5=-2$

18. (1) 32 (2) 0 (3) 16 (4) 16

(1) $(2+x-x^2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ 의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(2+1-1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$
$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2^5=32$ …… ㉠

(2) $(2+x-x^2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ 의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(2-1-1)^5=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_9+a_{10}$
$\therefore\ a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}=0$ …… ㉡

(3) ㉠+㉡에서 $2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=32+0$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=16$

(4) ㉠−㉡에서 $2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=32$
$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=16$

19. (1) 8 (2) −8 (3) 0 (4) 8

(1) $(x^2+2x-1)^3=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$에
$x=1$을 대입하면
$a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0=(1^2+2-1)^3=8$
(2) $(x^2+2x-1)^3=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$에
$x=-1$을 대입하면
$a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0=(1-2-1)^3=-8$
(3) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5+a_6=8$ …… ㉠
$a_0-a_1+a_2-\cdots-a_5+a_6=-8$ …… ㉡
㉠+㉡에서 $2a_0+2a_2+2a_4+2a_6=0$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+a_6=0$
(4) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5+a_6=8$ …… ㉠
$a_0-a_1+a_2-\cdots-a_5+a_6=-8$ …… ㉡
㉠−㉡에서 $2a_1+2a_3+2a_5=16$
$\therefore\ a_1+a_3+a_5=8$

20. ①

주어진 식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 어떠한 값을 대입해도 항상 성립한다.
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1=a_0+a_1+a_2+a_3\cdots+a_9+a_{10}$ …… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $0=2(a_0+a_2+\cdots+a_8+a_{10})$
$\therefore\ a_0+a_2+\cdots+a_8+a_{10}=0$