< 미분 #1 >

1. Mapping

미분 계수의 정의

① 평균변화율의 극한

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f'(a) =$

함수의 정확성

형태맞추기 (응 중)

일반화

② 기하적 의미 : $f'(a) = (x=a$ 에서의 접선의 기울기$) = \tan\theta$

미분가능성 (by Def)

① $f(x)$가 $x=a$에서 미·가 $\Leftrightarrow \exists f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

미분가능성 판정 ⟶ 미분가능만들기

정의역 내의 모든 x에 대하여 도함수 신뢰가능?

$\Leftrightarrow$ 좌미분계수 = 우미분계수

$\Leftrightarrow$ $x=a$ 에서 접선 존재 (작도가능)

$\Leftrightarrow$ Smooth (연속 & 첨점 X)

② $f(x)$가 $x=a$에서 미·가 $\Rightarrow$ $f(x)$는 $x=a$에서 연속 (대우)

ex) $f(x)=|x|$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

도함수의 정의

① $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x)$

② 정의 및 공식을 이용하여 도함수를 구할 수 있다고 해서 미분 가능성을 인정할 수 있는 것은 아님 (정의역의 문제 반영)

$f'(x)$의 정의역 $\subset$ $f(x)$의 정의역

기본 미분법

① 미분가능성은 사칙연산에 대하여 유지된다.

나눗셈 주의

② $y=c \longrightarrow y'=0$

③ $y=x^n \longrightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$

④ $y=c\cdot f(x) \longrightarrow y'=c\cdot f'(x)$

⑤ $y=f(x)\pm g(x) \longrightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

⑥ $y=f(x)\cdot g(x) \longrightarrow y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

⑦ $y=\frac{g(x)}{f(x)} \longrightarrow y'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

논리보다는 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있으면 OK!

특수 미분법

① 합성함수의 미분법

기존의 함수를 이용하여 어려운 함수의 도함수 확보! (~ 하지 않고)

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ or $y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

② 음함수의 미분법

$\frac{d}{dx}y^n = n\cdot y^{n-1}\cdot\frac{dy}{dx}$

③ 역함수의 미분법

$g'(a) = \frac{1}{f'(*)}$ $(f(*)=a)$

④ 매개변수 미분법

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

초월함수의
미분법

① 삼각함수

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cot x$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\quad (\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$

⇓

C 미분 ⇒ "−" 발생 ^^;

sec 미분 ⇒ 새끼치기

$\sin x$ $\cos x$ $\quad \tan x$ $\sec x$ $\quad \operatorname{cosec} x$ $\cot x$ 지들끼리~

② 지수함수

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(e^x)' = e^x$

③ 로그함수 → 로그미분법 → 복잡한 분수형태 / 밑과 지수가 동시에 변하는 거듭제곱 형태의 함수

#1. 양변 절대값

#2. 양변 $\ln$

#3. 양변 미분

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

→ log의 미분에서 절대값은 정의역을 확장하는 개념일 뿐 미분과정과는 무관함!

Tips.

1. 함수식과 항등식은 양변미분 가능!

2. 미분계수도 하나의 극한 ∴ 부등식 처리는 Sandwich

3. 우함수 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 기함수 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 우함수

4. $f(x+y)$ 등의 함수 사이의 관계식 ⇒ 함수값 & 미분계수(h 정의)

5. $\lim_{n\to\infty} n\cdot\{f(☆)-f(0)\}$ ⇒ $n=\frac{1}{x}$ ⇒ 미분계수

6. $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x>a) \\ f_2(x) & (x\le a) \end{cases}$ 가 $x=a$에서 미.가

⇔ (i) $f_1(a)=f_2(a)$: 연속

(ii) $f_1'(a)=f_2'(a)$: 연속인 상황에서 좌미분계수 = 우미분계수

7. 미분불가능인 점에서 방향성을 부여하면 극한을 얘기할 수 있음!

8. $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ ⇒ $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다!

<미분 #2>

1. Mapping

접선의 방정식

① 접점의 좌표가 point!

② 기울기가 주어진 경우

③ 곡선 밖의 점이 주어진 경우

⊕ 공통접선

직선의 핵심은 기울기이고 이를 미분을 통해 구하기 위해서는 접점의 좌표 Setting이 필수!

→ 접점의 개수가 곧 접선의 개수.

평균값 정리

① Rolle's Thm

$f(x)$가 $[a,b]$에서 연속 & (a,b)에서 미가 & $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow f'(c)=0$ 인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재!

② M.V.T

$f(x)$가 $[a,b]$에서 연속 & (a,b)에서 미분가능

$\Rightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재!

→ 움직이는 구간 Setting!

⇓

평균변화율이 조건으로 제시될 경우 미분계수로 변형하며 처리가능!

ex

함수의 graph

정의역 관찰

수평 / 수직 / 사선

$\pm\infty$

일차식 + 특정항 → 0

① 정의역 필수
② 점근선
③ 대칭성
④ 주기성
⑤ 특수한 Pt

option

} $f(x)$

⑥ 증가 / 감소
⑦ 극대 / 극소

} $f'(x)$

⑧ 볼록성
⑨ 변곡

} $f''(x)$

함수의 증가/감소

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$: 증가

$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$: 감소.

(역은 False)

$f'(x)=0$ 인 x가 고립점인 경우

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$: 증가.

원래의 정의는 미분과 무관함 (But, 미분을 이용하여 해석 가능)

함수의 극대/극소

미분가능

① $f(x)$가 $x=a$에서 극대 $\Leftrightarrow$ (i) $f'(a)=0$

(ii) $f'(a-h)>0$

(iii) $f'(a+h)<0$

② 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ (대우 / 역)

③ $f'(a)=0$ & $f''(a)<0 \Rightarrow x=a$ 에서 극대

④ $f(x)$가 극값을 갖기 위한 조건 $\Leftrightarrow$ $y=f'(x)$ 이 x축이 뚫는 교점을 갖는다.

함수의 볼록성

$f \longrightarrow f' \longrightarrow f''$

증감 / 극값 ← 부호

볼록성 / 변곡 ← 증감 / 극값 ← 부호

" $f(x)$: 아래로 볼록 $\Leftrightarrow f'(x)$: 증가 "

함수의 변곡

① $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$: 증가 $\Leftrightarrow f(x)$: 아래로 볼록

② $f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$: 감소 $\Leftrightarrow f(x)$: 위로 볼록

③ $f(x)$가 $x=a$에서 변곡 $\Leftrightarrow f''(a)=0$ & $f''(a-h)\cdot f''(a+h)<0$

함수의 Detail

① [a,b] 연속
극대 & 경계 비교
② 구간 내부 극대만 존재 ⇒ 최대

함수의 최대/최소

- easy → By graph
- hard → 합성함수 ⇓ 치환으로 해결
- impossible → 대수적 이해

⇓

graph 활용이 무한히 가능하므로
But, 미분 계산이 복잡해지는 경우
합성함수로 이해하는 것이 효과적!

⇓

미우러 함수 (짝수) : 애한 미분을 통해!

방정식 / 부등식

graph를 이용하여
실근의 개수 / 위치 파악
/ 상하관계 파악

⇓

초월함수에 관한 방정식 / 부등식
을 이루는 경우 해집합을 구하는
것이 불가능한 경우가 많음
∴ 직접적으로 해를 구하는 문제가 아님

속도 / 위치 변화율

$\frac{dy}{dx}$ 에서 x, y 변수에
각각 의미부여
(x : 시간, y : 위치)
길이
넓이
부피
각

시간 → 정의역 $x \geq 0$

① 직선상의 운동

$x(t)$: 시각 t에서의 위치

$x'(t) = \frac{dx}{dt}$: 시각 t에서의 속도 $\equiv v(t)$ / $|v(t)|$: 시각 t에서의 속력

$x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$: 시각 t에서의 가속도 $\equiv a(t)$

② 평면상의 운동

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t), g'(t))$: 시각 t에서의 속도

$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$: 시각 t에서의 속력

$\tan\theta = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$

③ 변화율(증가율 / 증가속도)

#1. 목표확인 ⇒ 변수 Setting ⇒ 구조파악 ⇒ 실제 목표에 관한 공식 확보
⇒ 음함수 미분 ⇒ 결론

도형분석 능력 필요.

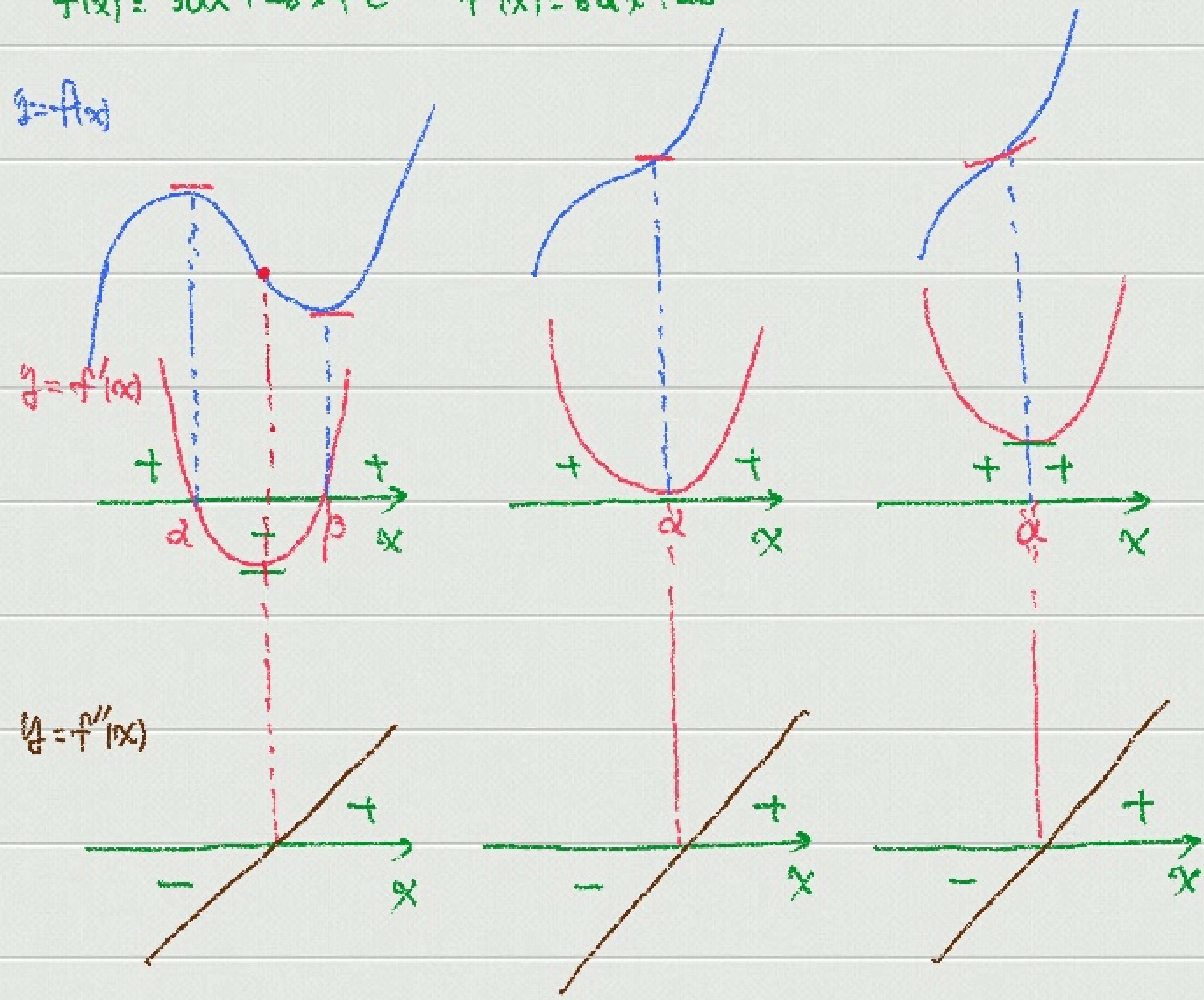
Note. 3차 / 4차 함수 분석

#1. 3차함수.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

$a > 0$



① 3차 함수의 graph 개형은 3가지 종류임.

② 3차함수는 반드시 변곡점을 갖는다. (유일)

③ 3차함수가 갖는 변곡점을 기준으로 점대칭이다.

④ 3차함수가 갖는 변곡점을 기준으로 대칭인 point 에서의 접선의 기울기는 동일하다.

⑤ 3차함수 위의 점에서 그은 접선은 변곡점을 제외하고 3차함수와 또다른 교점을 형성
변곡점에서 그은 접선은 그 접점(변곡)을 제외하고 3차함수와 만나지 않는다.