〈함수의 극한과 연속〉

1. Mapping

극한의 정의

- graph 기반: 수렴성 판정
  - ① 극한값 찾기 → graph / 계산
  - ② 좌극한 / 우극한 일치여부 확인 (Jump 함수 ex) $\frac{|x|}{x}$, $[x]$, 무한등비수열의 극한으로 정의된 함수, graph로 제시된 함수)

graph를 확보가능한가?

- graph X: 극한값 찾기
  - ① graph
  - ② 계산
  - 극한의 기본 성질 — 미정계수 결정
    - $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ & $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$
    - $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ & $\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0 \quad (\alpha \neq 0)$
  - L.L.T / Sandwich
    - $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim f(x) \le \lim g(x)$
    - ⇓ Sandwich로 확장 (극한 & 부등식)

① 증명 X

② graph를 통해 극한을 확인할 수 없는 경우 부분 분석을 통해 전체 극한을 이해할 수 있음!

→ 부정형 처리의 근거 (문제의 원인 제거 ⇒ 기본성질)

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \times 0$, $\infty - \infty$, 1^{∞} ...

③ 사칙연산을 통해 얻어낸 새로운 함수를 대상으로 한 극한 처리 가능!

→ 합성함수의 극한으로 연결

④ 수렴성이 보장되었을 경우에만 사용가능!

→ 수렴성이 보장된 함수의 극한 (부분분석)을 이용하여 새로운 함수 (정체미상)의 극한을 처리!

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$

$x \to a$

① $x \neq a$ ($x = a$에서의 함수값과는 무관) → $x = a$의 상황은 연속성에서 의미를 가짐! → 식 조작의 자유로움 확보

② $x = a$의 근방 (ex. 가우스 함수 처리)

③ 접근방식 (우극한 / 좌극한)

→ $x = a$에서 극한이 존재할 조건 ⇔ 우극한 = 좌극한 (By Def)

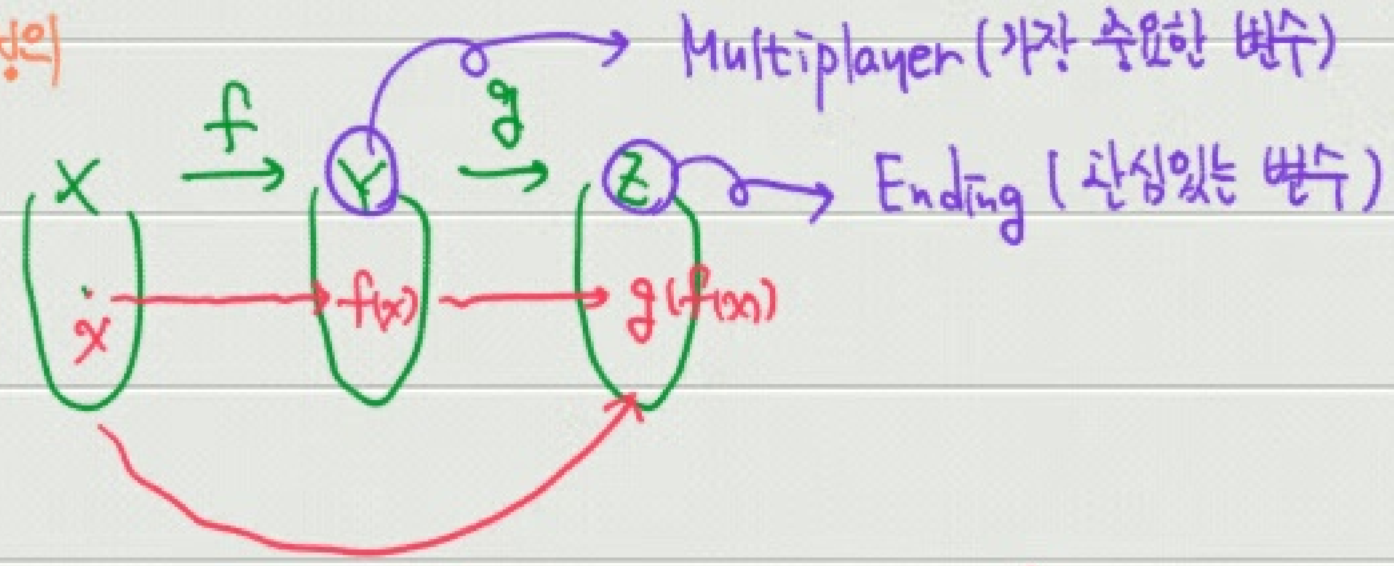
2. Note

(1) 합성함수 (둘 이상의 함수를 Mix 하여 얻어낸 새로운 함수) ∴ 난이도 확 용이 함수식은 확보할 수는 있으나

graph 확보 매우 어려움.

∴ 출제빈도 ⇑ 이를 이용하여 할 수 있는 것이 거의 없음!

① 정의



$g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

⇓

기존의 두 함수를 이용하여 합성함수에 대한 분석?

① 매개변수(t)를 이용하여 두 함수 조작 후

② f (Start)의 치역이 g (Ending)의 정의역 임을 이용!

⇓

Multiplayer (t)

합성함수의 ① 최대/최소

② 극한/연속

③ 미분/적분

point. 방향성?

(2) 초월함수의 극한

① 삼각함수

Sandwich

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

형태맞추기! (근거 : 치환)

도형 연계 (삼각형/원)

② 지수/로그 함수 (By graph)

③ e 의 정의 (1^∞)

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\Downarrow \qquad\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(3) 함수의 분류

함수

Good / Bad

연속함수 $\Leftarrow$ 연속이 아닌 함수

연속만들기

Worse

Worst

우극한 = 좌극한

대입 가능

우극한 = 좌극한

대입 불가능

$\Downarrow$

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한

ex) 분수함수

우극한 ≠ 좌극한

대입 불가능

$\Downarrow$

ex) $\frac{|x|}{x}$, $[x]$

무한등비수열의 극한

graph로 제시된 함수

	f	g	$f \pm \times \div g$
$x \to a+0$			
$x \to a-0$			
$x = a$			

연속성은 사칙연산에 대하여 유지된다. → 새로운 함수의 연속성

연속의 정의 — 연속함수의 성질 — 합성함수의 연속성 — 연속 관련 중요 정리

① $f(x)$가 $x=a$에서 연속

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Downarrow$

$f(x)$의 극한은 함수값으로 처리 가능!

좌극한 = 우극한 = 함수값

② $[a, b]$에서 연속

$\Downarrow$ point

구간별 함수

$f(x)$가 $x=a$에서 연속 & $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속

$\Rightarrow y = g(f(x))$는 $x=a$에서 연속!

$\Downarrow$

Start 함수의 불연속점 & Ending 함수의 불연속점을 함수값으로 하는 x좌표를 제외한 모든 점에서 $y=g(f(x))$는 연속성이 보장됨!

① 최대/최소 정리

$f(x)$가 $[a, b]$에서 연속 $\Rightarrow$ $f(x)$는 그 구간에서 반드시 최댓값/최솟값을 갖는다.

② 중간값 정리

$f(x)$가 $[a, b]$에서 연속 & $f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow f(a) < k < f(b)$인 임의의 k에 대하여

$f(c) = k$인 c가 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

방정식의 해의 위치

$\Downarrow$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

<point>

① 연속성 판정 (정의)

② 연속 만들기 (빵꾸 / Jump)