2017학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	④	**3**	⑤	**4**	①	**5**	②
6	⑤	**7**	④	**8**	③	**9**	⑤	**10**	③
11	②	**12**	①	**13**	①	**14**	④	**15**	④
16	②	**17**	②	**18**	⑤	**19**	①	**20**	③
21	④	**22**	46	**23**	5	**24**	100	**25**	8
26	7	**27**	39	**28**	10	**29**	9	**30**	30

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(2x^2+3xy)+(x^2-2xy)=3x^2+xy$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $n(A\cup B)=4$

3. [출제의도] 복소수 계산하기

$z=1+2i$에서 $\overline{z}=1-2i$

$z\times\overline{z}=(1+2i)\times(1-2i)=1-4i^2=1+4=5$

4. [출제의도] 무리함수 이해하기

$f(-1)=2$이므로 $f(x)=\sqrt{x+k}$에서

$\sqrt{-1+k}=2$

따라서 $k=5$

5. [출제의도] 합성함수 이해하기

$f(x)=3x+1$에서 $f(1)=4$, $f(2)=7$이므로

$g(f(1))=g(4)=7$

6. [출제의도] 다항식의 인수분해 이해하기

다항식 x^3+x^2-2를 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

$\therefore\ a=2,\ b=2$

따라서 $a+b=4$

7. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기

두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{a-2}{2+1}(x+1)$, $y=\dfrac{a-2}{3}x+\dfrac{a+4}{3}$

y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 5)$이므로 $\dfrac{a+4}{3}=5$

따라서 $a=11$

8. [출제의도] 명제의 조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -3\le x<4\}$, $Q=\{-\sqrt{k},\ \sqrt{k}\}$이다.

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

그러므로 $-3\le-\sqrt{k}$이고 $\sqrt{k}<4$

$\therefore\ 0\le k\le 9$이고 $0\le k<16$

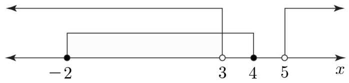
따라서 $0\le k\le 9$이므로 자연수 k의 개수는 9

9. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$\begin{cases}|x-1|\le 3 & \cdots ㉠ \\ x^2-8x+15>0 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 해는 $-2\le x\le 4$

㉡의 해는 $x<3$ 또는 $x>5$



㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 x의 범위는

$-2\le x<3$

따라서 정수 x의 개수는 5

10. [출제의도] 내분점과 외분점 이해하기

두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(-1, 5)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 P의 x좌표와 y좌표는 각각

$\dfrac{-1-4}{1-2}=5$, $\dfrac{5-0}{1-2}=-5$이므로 $\mathrm{P}(5,\ -5)$

선분 OP를 $3:2$로 내분하는 점의 x좌표와 y좌표는

각각 $\dfrac{15+0}{3+2}=3$, $\dfrac{-15+0}{3+2}=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ -3)$

11. [출제의도] 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{aligned}\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}&=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}\\&=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\\&=\frac{2^3-3\times4\times2}{4}\\&=-4\end{aligned}$$

12. [출제의도] 유리식을 활용하여 문제해결하기

급식 인원이 700명인 학교에서 식재료 A의 폐기율이 $a(\%)$, 정미 중량이 $48(\mathrm{g})$일 때,

발주량 $H_{\mathrm{A}}(\mathrm{g})$은 $\dfrac{48\times100}{100-a}\times700(\mathrm{g})$

식재료 B의 폐기율이 $2a(\%)$, 정미 중량이 $23(\mathrm{g})$일 때, 발주량 $H_{\mathrm{B}}(\mathrm{g})$은 $\dfrac{23\times100}{100-2a}\times700(\mathrm{g})$

$H_{\mathrm{A}}=2H_{\mathrm{B}}$이므로

$\dfrac{48\times100}{100-a}\times700=2\times\dfrac{23\times100}{100-2a}\times700$

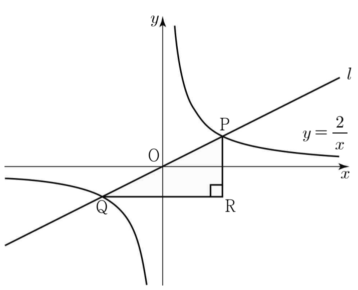
$2400-48a=2300-23a$, $25a=100$

따라서 $a=4$

13. [출제의도] 유리함수를 활용하여 문제해결하기

직선 l과 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 두 교점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이고 함수 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$라 하면 점 R의 좌표는 $\left(a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$이고, 삼각형 PQR는 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{QR}}=|a-(-a)|=|2a|$, $\overline{\mathrm{PR}}=\left|\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right|=\left|\dfrac{4}{a}\right|$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times|2a|\times\left|\dfrac{4}{a}\right|=4$

14. [출제의도] 인수정리를 이용하여 추론하기

$f(x)$와 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $F(x)=(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$라 하면

$F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이다.

$F(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$라 하면

$F(x)=(x-1)f(x)$이므로 $f(x)=(x-2)(x+a)$

$f(1)=-2$이므로 $(1-2)(1+a)=-2$

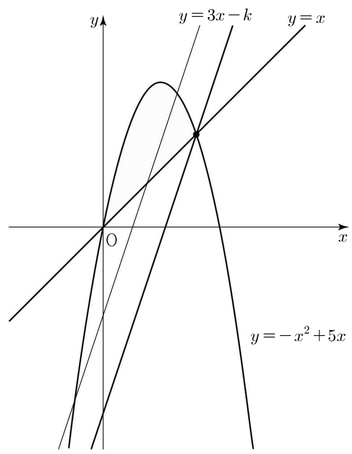
$\therefore\ a=1$

$F(x)=(x-2)g(x)$이므로 $g(x)=(x-1)(x+1)$

따라서 $g(2)=3$

15. [출제의도] 부등식의 영역을 활용하여 문제해결하기

연립부등식 $\begin{cases}y\ge x\\ y\le-x^2+5x\end{cases}$를 만족시키는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 그림의 어두운 부분과 같다.



이차함수 $y=-x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $(0, 0)$과 $(4, 4)$이다.

$3x-y=k$라 하면 직선 $y=3x-k$는 기울기가 3이고 y절편이 $-k$이다.

이 직선을 주어진 부등식의 영역과 만나도록 평행이동하면서 k의 값의 변화를 조사하면

직선 $y=3x-k$가 점 $(4, 4)$를 지날 때 k는 최댓값을 갖는다.

$4=3\times4-k$에서 $k=8$

따라서 $3x-y$의 최댓값은 8

16. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

두 점 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(0, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A}'(1, 0)$, $\mathrm{B}'(2, 0)$이다.

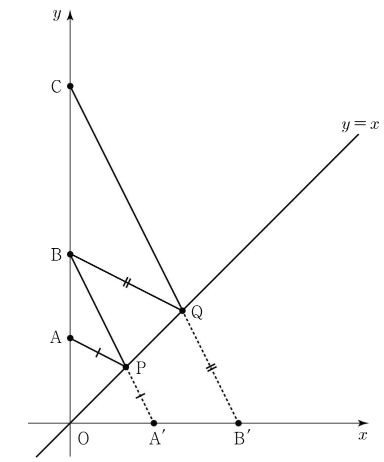
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{B'Q}}+\overline{\mathrm{QC}}\\&\ge\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{B'C}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}$의 값이 최소일 때는

점 P가 두 점 A′, B를 지나는 직선 위에 있고,

점 Q가 두 점 B′, C를 지나는 직선 위에 있을 때이다.



두 점 $\mathrm{A}'(1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=-2x+2$
두 점 $\mathrm{B}'(2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=-2x+4$
점 P는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+2$의 교점이고
점 Q는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+4$의 교점이므로
$\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17. [출제의도] 이차함수의 접선의 방정식 추론하기

양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$에서의 접선의 방정식은 $y=m_1(x-a)+a^2$이다.
곡선 $y=x^2$과 직선 $y=m_1(x-a)+a^2$이 접하므로
이차방정식 $x^2=m_1(x-a)+a^2$이 중근을 갖는다.
이차방정식 $x^2-m_1x+am_1-a^2=0$의 판별식을
D라 하면 $D=m_1^2-4am_1+4a^2=0$
$m_1=\boxed{2a}$
$y=m_2(x-a)+a^2$이 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나므로
$1=-am_2+a^2$
$m_2=\boxed{a-\frac{1}{a}}$
$m_1-m_2=2a-\left(a-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}\geq 2$
(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)
따라서 m_1-m_2의 최솟값은 $\boxed{2}$ 이다.
$\therefore\ f(a)=2a,\ g(a)=a-\frac{1}{a},\ k=2$
따라서 $f(k)\times g(k)=4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=6$

18. [출제의도] 삼차방정식의 근 추론하기

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 다른 한 허근이므로
$\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\times\overline{\omega}=1$
ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$ (참)
ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$
$\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$
$\therefore\ \frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$ (참)
ㄷ. $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$
$\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^n$
$=(-1)^n\times\left(\frac{1}{\omega}\right)^n$
$=(-1)^n\times(\omega^2)^n$
$(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 n은
$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$, $1=(-1)^n$을
만족시키므로 n은 짝수이다.
그러므로 100 이하의 짝수 n의 개수는 50 (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

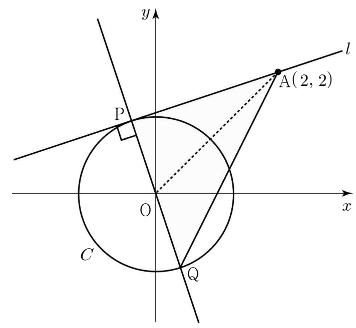
19. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

$3<a<7$일 때, 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의
그래프와 직선 $y=2x-12a$가 만나지 않으므로
기울기가 2인 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax-20$에
접할 때의 접점이 점 P일 때,
점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가
최소가 된다.
$y=x^2-2ax-20$에 접하고 기울기가 2인 직선을
$y=2x+b$라 하면
$x^2-2ax-20=2x+b$
$x^2-2(a+1)x-20-b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=4(a+1)^2+4(20+b)=0$
$b=-(a+1)^2-20=-a^2-2a-21$이므로
접선의 방정식은 $y=2x-a^2-2a-21$
$f(a)$는 두 직선 $y=2x-12a$와
$y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리와 같으므로
직선 $y=2x-12a$ 위의 점 $(6a, 0)$과
직선 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리를 구하면
$$f(a)=\frac{|12a-a^2-2a-21|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{|-a^2+10a-21|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{|-(a-5)^2+4|}{\sqrt{5}}\quad(3<a<7)$$
따라서 $f(a)$의 최댓값은 $f(5)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

20. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 추론하기

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1\ \cdots$ ㉠
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$,
나머지를 R_2라 하면
$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2\ \cdots$ ㉡
㉡에 $x=2$를 대입하면
(가)에서 $R_2=f(2)=Q_2(1)$
$f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$에
$x=1$을 대입하면 $f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$
㉠에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=R_1=0$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로
$Q_1(x)=x+a$라 하면 $f(x)=(x-1)(x+a)$
$Q_1(1)=1+a$, $f(2)=2+a=Q_2(1)$이므로
(나)에서 $Q_1(1)+Q_2(1)=(1+a)+(2+a)$
$=2a+3=6$
$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ f(x)=(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$
따라서 $f(3)=(3-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$

21. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 활용하여 문제해결하기



원 C의 반지름의 길이가 r이고 선분 PQ가 원 C의
지름이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2r$, $\overline{\mathrm{OP}}=r$
삼각형 APQ가 이등변삼각형이고
$\angle\mathrm{APQ}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=2r$
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$
삼각형 APO에서 $8=r^2+4r^2$, $r^2=\frac{8}{5}$
점 P의 좌표가 (a, b)이므로 $a^2+b^2=\frac{8}{5}$
원 $x^2+y^2=\frac{8}{5}$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의
접선 $ax+by=\frac{8}{5}$이 점 $\mathrm{A}(2, 2)$를 지나므로
$2a+2b=\frac{8}{5}$, $a+b=\frac{4}{5}$
$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=\frac{16}{25}-\frac{8}{5}=-\frac{24}{25}$이므로
$ab=-\frac{12}{25}$

22. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 50이고 공차가 -2인
등차수열이므로 $a_3=50+(3-1)\times(-2)=46$

23. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $y=3x-5$를 x축의 방향으로 a만큼,
y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선은
$y-2a=3(x-a)-5$이고 $y=3x-a-5$가
$y=3x-10$과 일치하므로 $-a-5=-10$
따라서 $a=5$

24. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3+a_5=(a+2d)+(a+4d)=2a+6d=14$
$a_4+a_6=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=18$
이므로 $a=1$, $d=2$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\frac{10(2+9\times 2)}{2}=100$
[다른 풀이]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
a_4는 a_3과 a_5의 등차중항이므로

$2a_4=a_3+a_5=14$, $a_4=7$
a_5는 a_4와 a_6의 등차중항이므로
$2a_5=a_4+a_6=18$, $a_5=9$
$\therefore\ d=a_5-a_4=9-7=2$
$a_4=a+3d=a+3\times2=7$
$\therefore\ a=1$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\dfrac{10(2+9\times2)}{2}=100$

25. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,9\}$이므로
$A-B=\{2,4\}$
$(A-B)\cap C=\varnothing$이므로 $2\notin C$, $4\notin C$이고,
$A\cap C=C$이므로 $C\subset A$
즉, 집합 C는 $2\notin C$, $4\notin C$인 A의 부분집합이다.
따라서 집합 C의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

26. [출제의도] 역함수 이해하기

함수 g의 역함수가 존재하므로 함수 g는
일대일대응이다.
$g(2)=3$
$g^{-1}(1)=3$이므로 $g(3)=1$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=2$, $f(2)=1$이므로 $g(1)=2$
$\therefore\ g(4)=4$, $g^{-1}(4)=4$
따라서 $g^{-1}(4)+(f\circ g)(2)=4+f(g(2))$
$=4+f(3)$
$=4+3=7$

27. [출제의도] 연립방정식을 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 ABC, DBA에서
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCA}$, $\angle\mathrm{B}$는 공통이므로
$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DBA}$
$\overline{\mathrm{CD}}=x$, $\overline{\mathrm{AC}}=x-1$, $\overline{\mathrm{AB}}=y$라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{DA}}$이므로 $y:(x-1)=8:6$
$\therefore\ x=\dfrac{3}{4}y+1$ ⋯ ㉠
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{BA}}$이므로 $y:(8+x)=8:y$
$\therefore\ y^2=8x+64$ ⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $y^2=8\times\left(\dfrac{3}{4}y+1\right)+64$
$y^2-6y-72=0$, $(y-12)(y+6)=0$
$\therefore\ y=12$ ($\because\ y>0$)
$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=10$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{BC}}=8+10=18$, $\overline{\mathrm{CA}}=9$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$12+18+9=39$

28. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 문제해결하기

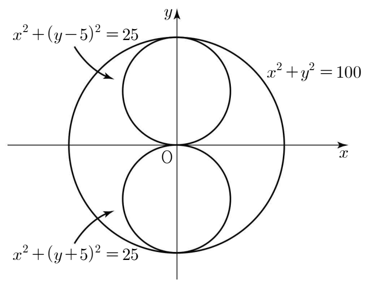
두 직선 l, m이 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$의
넓이를 4등분하므로 두 직선 l, m은
원의 중심 $(1,3)$을 지나고 서로 수직인 직선이다.
직선 l의 기울기가 $a(0<a<3)$이므로
직선 m의 기울기는 $b=-\dfrac{1}{a}$
$l:y=a(x-1)+3$, $m:y=-\dfrac{1}{a}(x-1)+3$
직선 l의 x절편과 y절편은 각각 $1-\dfrac{3}{a}$, $3-a$이고,
직선 m의 x절편과 y절편은 각각 $1+3a$, $3+\dfrac{1}{a}$
이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의
넓이 S_1은 $S_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a}-1\right)(3-a)$
직선 m과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이
S_2는 $S_2=\dfrac{1}{2}(1+3a)\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$
$S_1+S_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a}-1\right)(3-a)+\dfrac{1}{2}(1+3a)\left(3+\dfrac{1}{a}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10}{a}+10a\right)\geq 10$
(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)
따라서 S_1+S_2의 최솟값은 10

29. [출제의도] 등비수열을 이용하여 추론하기

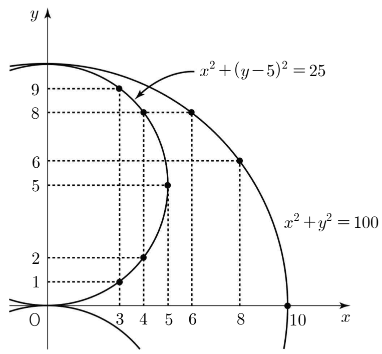
$U=\{r^k|k$는 102 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A의
원소들은 모두 r의 거듭제곱으로 표현된다.
(가)에 의해 $r\in A$
(나)에 의해 집합 A의 원소들을 작은 수부터
차례대로 배열한 수열은 등비수열이고 $r>1$이므로
첫째항은 r이다.
공비를 r^a(a는 자연수)라 하면
일반항은 $r(r^a)^{n-1}$ $(n\geq2)$이다.
$r^{31}\in A$, $r^{100}\in A$이므로 두 자연수 n_1, n_2에 대하여
$r(r^a)^{n_1-1}=r^{31}$, $r(r^a)^{n_2-1}=r^{100}$
$r^{a(n_1-1)}=r^{30}$, $r^{a(n_2-1)}=r^{99}$
따라서 a는 30과 99의 공약수이므로
$a=1$ 또는 $a=3$
(다)에 의해 A는 전체집합 U의
진부분집합이므로 $a=3$이고,
일반항은 $r(r^3)^{n-1}=r^{3n-2}$
전체집합 U의 원소들의 합은
첫째항이 r, 공비가 r인 등비수열의 제102항까지의
합과 같으므로 $\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}$이다.
집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면
$3n-2\leq102$, $n\leq34$
집합 A의 원소들의 합은
첫째항이 r, 공비가 r^3인 등비수열의 제34항까지의
합과 같으므로 $\dfrac{r\{(r^3)^{34}-1\}}{r^3-1}$이다.
$\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}=91\times\dfrac{r(r^{102}-1)}{r^3-1}$
$=91\times\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}\times\dfrac{1}{r^2+r+1}$
$r^2+r+1=91$
$r^2+r-90=(r+10)(r-9)=0$
$\therefore\ r=-10$ 또는 $r=9$
따라서 $r=9$

30. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 문제해결하기

점 A의 좌표를 (x,y)라 하면 점 B는 점 A를
원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는
$(-x,-y)$이다.
세 점 $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(-x,-y)$, $\mathrm{C}(0,10)$을
꼭짓점으로 하는 삼각형의 세 변의 길이
$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=4x^2+4y^2$
$\overline{\mathrm{BC}}^2=x^2+(y+10)^2$
$\overline{\mathrm{CA}}^2=x^2+(y-10)^2$
삼각형 ABC가 직각삼각형인 경우는
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$ 또는
$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$ 또는
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$ 이다.
i) $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$ 일 때,
$(4x^2+4y^2)+\{x^2+(y+10)^2\}=x^2+(y-10)^2$
$\therefore\ x^2+(y+5)^2=25$
ii) $\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$ 일 때,
$\{x^2+(y+10)^2\}+\{x^2+(y-10)^2\}=4x^2+4y^2$
$\therefore\ x^2+y^2=100$
iii) $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$ 일 때,
$(4x^2+4y^2)+\{x^2+(y-10)^2\}=x^2+(y+10)^2$
$\therefore\ x^2+(y-5)^2=25$
i), ii), iii)을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



점 A는 y축 위의 점이 아니므로 그림의 원 위에
존재하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 A의
개수는 제1사분면 위의 점의 개수의 4배와
x축 위의 두 점 $(10,0)$, $(-10,0)$의 개수 2를
더한 것이다.



$x=3$일 때, $(3,1)$, $(3,9)$
$x=4$일 때, $(4,2)$, $(4,8)$
$x=5$일 때, $(5,5)$
$x=6$일 때, $(6,8)$
$x=8$일 때, $(8,6)$
따라서 x좌표와 y좌표가 모두 정수이면서
삼각형 ABC가 직각삼각형이 되는 점 A의 개수는
$7\times4+2=30$